

Programme de colle n°7 Semaine du 17/11 Algèbre linéaire

Pour cette semaine, les exercices étoilés du TD4 sont exigibles.

Généralités

- Définition (les axiomes ont été donnés mais ne sont pas exigibles, on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sev d'un des espaces de référence).
- Les espaces de référence sont : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$. Seuls les espaces de dimension finie sont au programme.
- Espace $\mathbb{R}_n[x]$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$) :
 - On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes. La notation avec les X^k est privilégiée.
 - Résultats utiles : deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients ; a est racine de P ssi P peut se factoriser par $(X - a)$; si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ a $n + 1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
- Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel.
- Espace engendré par une famille finie de vecteurs.
- Famille génératrice, famille libre, base. Coordonnées. Bases canoniques des espaces de référence.
- Caractérisation des familles libres dans le cas de familles à 1 vecteur ; à 2 vecteurs.

Théorie de la dimension

- On appelle dimension de E , le cardinal commun de toutes les bases.
- Toute famille libre de E a un cardinal $\leq \dim(E)$; toute famille génératrice de E a un cardinal $\geq \dim(E)$. Contraposées de ces propositions.
- Toute famille de cardinal $\dim(E)$ est une base ssi elle est libre ; ssi elle est génératrice.
- Dimension d'un sev. Si E et F sont deux espaces vectoriels, $E = F \Leftrightarrow (F \subset E \text{ et } \dim(E) = \dim(F))$.
- Rang d'une famille de vecteurs : définition ; cas où la famille est libre.
Rang d'une matrice. $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$ (résultat admis). Conséquence : le rang de M est aussi le rang de la famille de ses lignes.

Applications linéaires

f désigne une application linéaire de E dans F

- Définition de la linéarité. Conséquences immédiates : $f(0_E) = 0_F$; l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.
- Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau et image d'une application linéaire. Ce sont des sev, respectivement de E et de F .
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Matrice d'une application linéaire. Méthode de construction de cette matrice.

- Application linéaire canoniquement associée à une matrice (programme d'ECG1).
- Propriétés : matrice de $f \circ g$, de f^n , de f^{-1} . $f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme ssi sa matrice dans une base quelconque est inversible.
- Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Conséquence : entre espaces de même dimension (et en particulier pour les endomorphismes), injectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité, et surjectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité.
Le rang de f est celui de sa matrice dans des bases quelconques.
 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi elle est de rang n .
NB : le théorème du rang sur une matrice n'est pas au programme ; il faut se ramener à l'application linéaire canoniquement associée.
- Matrices de passage : méthode de construction, propriétés : toute matrice de passage est inversible,
 $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.
Formule du changement de base. Matrices semblables. Deux matrices semblables sont de même rang.
Si A et B sont semblables, A est inversible ssi B est inversible.