ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Concours Blanc n°1
Maths 1
24/11/2025
Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
S'il existe au moins un exercice dans lequel aucune question d'informatique n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
   (c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}([X = n]) \text{ puis } \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$
   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
   (c) En déduire la loi de V.
4. (a) Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
   (b) En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. **Simulation informatique**

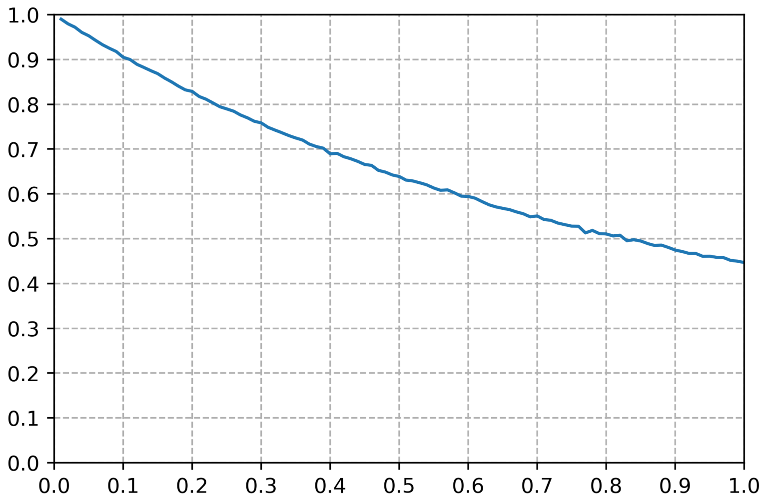
   (a) Écrire une fonction Python `simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

   (b) Écrire une fonction Python `simule_Y(p)`, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y.

   (c) On suppose que les deux fonctions précédentes sont codées correctement. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```python
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10000
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return r
```

   (d) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



   À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

6. **Étude de la variable aléatoire** Y
   On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

   (a) Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

   (b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

7. (a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n])\mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

(b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

(c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Préliminaire : transitivité de la relation de similitude

1. Soient $(A, B, C) \in \left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\right)^3$.

   (a) Montrer que si A est semblable à B, et si B est semblable à C, alors A est semblable à C.

   (b) Montrer que si A est semblable à B, et si A et B sont inversibles, alors A^{-1} est semblable à B^{-1}.

   On n'hésitera pas à utiliser ces résultats dans le reste de l'exercice.

Partie A: Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que φ est un automorphisme.

3. Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$, non nuls, tels que $\varphi(u) = \frac{1}{2}u$; $\varphi(v) = v$; $\varphi(w) = 2w$.

4. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.

5. En déduire une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Expliciter la matrice D^{-1}.

6. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

7. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $N = T - I_3$.

8. (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)\left(I_3 - N + N^2\right)$.

   (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

9. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

   (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

   (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

10. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I: Étude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer : $b \in [2,4]$.
4. Programmer une fonction Python qui prend en entrée un réel `eps` > 0 et renvoie une valeur approchée de b à la précision `eps` (on utilisera un algorithme de dichotomie).

Partie II : Étude d'une suite.

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.
6. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. (a) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
8. (a) Écrire une fonction Python `suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

   (b) En utilisant le résultat de la question 7b, donner des instructions Python qui renvoient une valeur approchée de b à 10^{-5} près.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale.

On note Φ la fonction donnée par:

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

9. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

10. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.
11. Montrer: $\forall x \in]0,+\infty[, 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
12. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée ; préciser alors $\Phi(0)$.

On admet que la fonction Φ est dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

13. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : approximation de Φ par la méthode des rectangles.

On donne le résultat suivant (sommes de Riemann) : si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

14. Programmer en Python une fonction `rectangles(f,a,b,n)` qui prend en argument une fonction f, deux réels a et b avec $a \leqslant b$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$; et renvoie la valeur de $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Dans la suite, on admet que la valeur $n = 1000$ donne une approximation suffisante de l'intégrale.

15. Compléter le code suivant, qui utilise la fonction `rectangles` et renvoie une valeur approchée de $\Phi(x)$ pour $x > 0$.

```python
def g(t):
    return ......

def Phi(x):
    return rectangles( g , ... , ... , ...)
```

16. Donner une suite de commandes permettant d'afficher la courbe représentative de la fonction Φ sur l'intervalle $[1, 10]$ (on n'oubliera pas la ligne d'import du package de tracés graphiques).