

# Exercice 1

1a.  $X$  est le nombre de Face obtenus avant l'obtention du 2<sup>o</sup> Pile.

En notant  $P_i$  (resp.  $F_i$ ) l'événement "obtenir Pile (resp. Face) au  $i$ -ème lancer" :

$$(P(P_i) = 2/3; P(F_i) = 1/3)$$

$$(X=0) = P_1 \cap P_2 \quad \text{d'où par indep. des lancers}$$

$$\boxed{P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$(X=1) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \Rightarrow P(X=1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

↑  
union disjointe

$$\boxed{P(X=1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$(X=2) = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$$

$$\Rightarrow P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{27}}$$

1b. Plus généralement, on a  $[X=n]$  si :

• on obtient le 2<sup>o</sup> Pile au  $(n+2)$ -ème lancer.

• le 1<sup>o</sup> Pile est obtenu à un rang  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  ( $\rightarrow n+1$  possibilités)

$$(X=n) = \bigcup_{k=1}^{n+1} [F_1 \cap \dots \cap P_k \cap \dots \cap F_{n+1}] \cap P_{n+2} \quad (\text{union disjointe})$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{P(X=n) = (n+1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}}$$

2a. Sachant  $(X=n)$ ,  $U$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

(2)

Comme  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  :  $U(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, n \rrbracket = \underline{\underline{\mathbb{N}}}$ .

2b. Sachant  $(X=n)$ ,  $U$  est la boule tirée de manière équiprobable

ds  $\boxed{\begin{matrix} \textcircled{0} & \textcircled{1} \\ \vdots & \vdots \\ & \textcircled{n} \end{matrix}}$  : la loi conditionnelle de  $U$  sachant  $(X=n)$   
est  $U(\llbracket 0, n \rrbracket)$

(Autrement dit:  $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P_{(X=n)}(U=k) = \frac{1}{n+1}$  si  $k \leq n$   
 $= 0$  si  $k > n$ )

2c. Par FPT sur la SCE  $(X=n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} P(U=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(X=n)}(U=k) \times P(X=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n) \quad \left( \text{cf formule ci-dessus,} \right. \\ &\quad \left. \text{terme nul si } n < k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(U=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \cdot \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(U=k) = \frac{2}{3^{k+1}}}$$

$$2d. \quad |k P(U=k)| = \frac{2k}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2} \cdot k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

(3)

sr le terme général d'une série cv (géo. décroissante,  $|\frac{1}{3}| < 1$ ) donc

$U$  admet une espérance.

$$\text{On a } E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(U=k) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Pour la variance, on étudie l'existence de  $E(U^2)$ :

$$\begin{aligned} |k^2 P(U=k)| &= \frac{2k^2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \left(k(k-1) + k\right) \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{3^{k+1}} k(k-1) + \frac{2}{3^{k+1}} k \\ &= \frac{2}{3^3} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Tq de série cv ici aussi (mêmes raisons).

$\Rightarrow E(U^2)$  existe ; et

$$E(U^2) = \frac{2}{3^3} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{2}{9} \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}$$

$$= \frac{2^2}{3^3} \times \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} + \frac{2}{3^2} \frac{1}{(\frac{2}{3})^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned} \text{puis } V(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(U) = \frac{3}{4}}$$

3a. Si  $(X=n)$ ,  $U$  varie entre 0 et  $n$  donc  $V$  aussi!

(4)

Ainsi  $V(\Omega) = \mathbb{N}$

3b.  $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$ :  $P_{(X=n)}(V=k) = P_{(X=n)}(U=n-k)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq n-k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{(X=n)}(V=k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

3c. La loi conditionnelle sachant  $(X=n)$  est identique à celle de  $U$ .

Les mêmes calculs montrent que  $V$  suit la même loi que  $U$

4a. On a :  $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P(U=k)P(V=l) = \frac{4}{3^{k+l+2}}$  d'après la formule de 2c  
( $U$  et  $V$  suivent la m. loi)

De plus :  $P((U=k) \cap (V=l)) = P((U=k) \cap (X=k+l))$

$$= P(X=k+l) P_{(X=k+l)}(U=k)$$

$$(1b) = (k+l+1) \frac{4}{3^{k+l+2}} \times \frac{1}{k+l+1} \quad \left. \begin{array}{l} (2b), \text{ avec } \\ k+l \geq k \end{array} \right\}$$

$$P((U=k) \cap (V=l)) = \frac{4}{3^{k+l+2}} = P(U=k) \times P(V=l).$$

$U$  et  $V$  sont bien indépendantes

4b  $\rightarrow$  Vers fin de l'exercice.

5a. On maintient un compteur de Pile, et on compte les Face jusqu'à arriver à 2 "Pile".

(5)

```
def simule_X():
```

```
    p = 0
```

```
    f = 0
```

```
    while p < 2:
```

```
        if rd.random() <  $\frac{2}{3}$  : # Pile
```

```
            p = p + 1
```

```
        else:
```

```
            f = f + 1
```

```
    return f
```

5b. On peut procéder de manière assez similaire, on remarque qu'il suffit de renvoyer le tps d'attente du 1<sup>er</sup> Pile, moins un!

```
def simule_Y(p):
```

```
    return rd.geometric(p) - 1.
```

5c. La fonction proposée simule 10000 fois le jeu pour une valeur de  $p$  donnée;  $x$  contient alors le nb de parties gagnées par A (condit°  $x \leq y$ ) divisé par 10000.

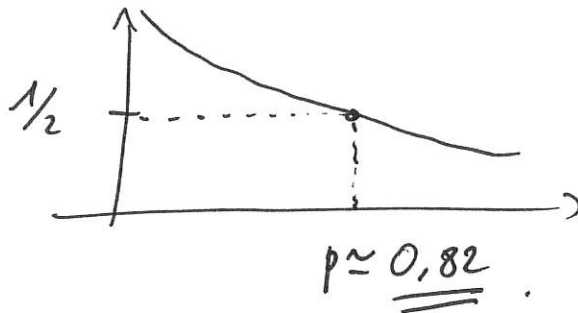
On sait qu'à grand nombre d'expériences,  $x$  s'approche alors de la proba que A gagne.

⇒ Cette fonction renvoie, pour  $p \in ]0, 1[$  donné, une estimation de la proba que A gagne le jeu.

5d. Le jeu est équilibré ssi  $P(A \text{ gagne}) = \frac{1}{2}$ .

⑥

Il suffit alors de regarder pour quelle valeur de  $p$  la proba que  $A$  gagne (vue en ordonnée) vaille  $\frac{1}{2}$ . ↑  
abscisse



6. a.  $Z$  est le nombre de lancers effectués par  $B$  jusqu'à obtenir du 1<sup>er</sup> pile.

Les lancers sont indépendants, et on obtient pile avec proba  $p$ :

$$\boxed{Z \sim G(p)} \quad \underline{E(Z) = \frac{1}{p}} \quad ; \quad \underline{V(Z) = \frac{1-p}{p^2}}$$

6b. Le nb de Face est alors clairement

$$\underline{Y = Z - 1}.$$

$E(Z)$  et  $V(Z)$  existent, donc  $E(Y)$  et  $V(Y)$  aussi.

$$\text{Par linéarité, } E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \boxed{\frac{1-p}{p}}$$

$$\text{et } V(Y) = V(Z - 1) = V(Z) = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

6c.

6c.  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y=k)$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} P(Z=k+1)$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} q^k p$$

$$= p \cdot \frac{q^n}{1-q}$$

(q = 1-p)

|q| < 1

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(Y \geq n) = q^n}$$

7a. Par formule des probas totales sur le SCE  $((X=n))_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$P(X \leq 4) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X \leq 4) \cap (X=n))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n) \cap (Y \geq n))$$

$$\xrightarrow{X, Y \text{ indep.}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) P(Y \geq n)$$

7b. Avec 6c et 1b:

$$P(X \leq 4) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \times q^n$$

$$= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n$$

$$= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1}$$

Or  $0 < q < 1$   
donc  $\left|\frac{q}{3}\right| < 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(X \leq 4) &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{9}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(\frac{3-9}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{3^2}{(3-9)^2}
 \end{aligned}$$

$$P(X \leq 4) = \frac{4}{(2+p)^2}$$

7c. le jeu est équilibré si:  $P(\text{Agagne}) = \frac{1}{2}$ .

On par défaut, Agagne si:  $X \leq 4$  !

On cherche alors  $p$  tq  $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (2+p)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2+p = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p = 2(\sqrt{2} - 1)}$$

Avec  $\sqrt{2} \approx 1,4$  on retrouve bien  $p \approx 0,8$ .

4b)  $U$  et  $V$  sont indépendants donc  $\text{Cov}(U, V) = 0$

On en déduit  $\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U+V, U)$   
 $= \text{Cov}(U, U) + \text{Cov}(V, U)$  (bilinearité)  
 $= V(U)$

$$\boxed{\text{Cov}(X, U) = 1}$$

## Exercice 2

224 (1)

1a. Si  $A$  est semblable à  $B$ , il existe  $P$  inversible telle que  $B = P^{-1} A P$

$$B \xrightarrow{\quad} C \xrightarrow{\quad} Q \xrightarrow{\quad} C = Q^{-1} B Q$$

Alors :  $C = Q^{-1} (P^{-1} A P) Q$

$$= (Q^{-1} P^{-1}) A (P Q)$$

$$C = (P Q)^{-1} A (P Q) \quad . \quad P \text{ et } Q \text{ sont inversibles donc } P Q \text{ l'est aussi.}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \text{ et } C \text{ sont semblables}}$$

$$1b. \quad B = P^{-1} A P \Rightarrow B^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1} \\ = P^{-1} A^{-1} (P^{-1})^{-1}$$

$$B^{-1} = P^{-1} A^{-1} P$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

2.  $A$  est triangulaire, sans zéro sur la diagonale ; donc  $A$  est inversible.

Ainsi, Comme  $A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_c)$   $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme}}$

3. On a:  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi((x, y, z)) = (x - y + z, \frac{1}{2}y, 2z)$  (2)

$$* \quad \varphi((x, y, z)) = \frac{1}{2}(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y \\ 2z = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

on peut choisir  $\boxed{u = (2, 1, 0)}$

$$* \quad \varphi((x, y, z)) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = x \\ \frac{1}{2}y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = z = 0}}$$

on peut choisir  $\boxed{v = (1, 0, 0)}$

$$* \quad \varphi((x, y, z)) = 2(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2x \\ \frac{1}{2}y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

on peut choisir  $\boxed{w = (1, 0, 1)}$

4)  $(u, v, w)$  est de cardinal  $3 = \dim \mathbb{R}^3$  : c'est une base de  $\mathbb{R}^3$  ssi elle est libre.

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B \text{ est libre}}}$$

Avec les relations de la question 3 on a immédiatement

(3)

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

5) Par formule du changement de base,  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  convient.

$$\text{On a donc } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D^{-1}$  est diagonale donc il suffit d'inverser les coefficients diagonaux:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. On trouve  $Q^2 = I_3$ , et  $QDQ = D^{-1}$

7. On en déduit:

$$* Q^2 = I_3 \text{ donc } Q^{-1} = Q$$

$$* D^{-1} = QDQ = Q^{-1}DQ \text{ donc } D \text{ et } D^{-1} \text{ sont semblables}$$

\*  $A$  semblable à  $D$  (q.5);  $D$  semblable à  $D^{-1}$ ; et  $D^{-1}$  semblable à  $A^{-1}$  (q.1)

$$\Rightarrow \boxed{A^n \text{ semblable à } A^{-1}} \text{ d'après la quest } ^\circ 1$$



d'où  $\lambda_3 = 0$ .

⑦

On reprend  $\otimes$  et on compose par  $g$ :

$$\underbrace{\lambda_1 g^3(u)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{g^2(u)}_{=0} + \underbrace{\lambda_3 g(u)}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

et  $\lambda_1 g^2(u) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ .

Tous les  $\lambda$  sont nuls donc  $\mathcal{B}_3$  est libre ; de cardinal 3 = dim  $\mathbb{R}^3$  ;  
donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

9c. 
$$\begin{array}{l} g(g(g(u))) = g^3(u) = 0 \\ g(g(u)) = g^2(u) \\ g(u) = g(u) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d'où } e_1 = g(g(u)) \\ e_2 = g(u) \\ e_3 = u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g(e_1) = 0 \\ g(e_2) = e_1 \\ g(e_3) = e_2 \end{array}$$

d'où 
$$\text{Mat}(g, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9d. 
$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où 
$$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}(g, \mathcal{B}_3)$$

$$N = \text{Mat}(g, \mathcal{B}_e) \text{ et } N^2 - N = \text{Mat}(g, \mathcal{B}_3) \Rightarrow \boxed{N \text{ et } N^2 - N \text{ sont semblables}}$$

$$10. \quad T = I_3 + N$$

$$\text{et } T^{-1} = I_3 - N + N^2$$

(8)

On a vu que  $N$  et  $N^2 - N$  sont semblables: soit  $P \in M_3(\mathbb{R})$

$$\text{tq } P^{-1}NP = N^2 - N$$

$$\begin{aligned} \text{alors } P^{-1}TP &= P^{-1}I_3P + P^{-1}NP \\ &= P^{-1}P + N^2 - N \\ &= I_3 + N^2 - N \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{P^{-1}TP = T^{-1}}}$$

donc  $\boxed{T \text{ et } T^{-1} \text{ sont semblables}}$

### Exercice 3

2/15 (20)

Soit  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - \ln(x)$

Partie I

1°)  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée de  $\mathcal{C}^1$

$\forall x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} > 0$

ph: voir fin de l'ex.

d'où le tableau

|         |             |              |                    |
|---------|-------------|--------------|--------------------|
| $x$     | 0           | 1            | $+\infty$          |
| $f'(x)$ | $\parallel$ | $-$          | $+$                |
| $f(x)$  | $\parallel$ | $\nearrow 1$ | $\nearrow +\infty$ |

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$   
 $\xrightarrow{\rightarrow 0 \text{ (c.c.)}}$

2. Sur  $]0, 1]$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^0$ , strict<sup>+</sup>  $\downarrow$  donc réalise une biject<sup>o</sup> de  $]0, 1]$  sur  $[1, +\infty[$

$2 \in [1, +\infty[$  donc  $\exists ! a \in ]0, 1]$  tq  $f(a) = 2$

De plus  $f(1) = 1 \neq 2$  donc  $a \neq 1$  :  $a \in ]0, 1[$ .

De m :  $\exists ! b \in ]1, +\infty[$  tq  $f(b) = 2$  ( $f$  bijective de  $]1, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$ )

Il y a donc exact<sup>+</sup> 2 solut<sup>o</sup> sur  $\mathbb{R}_+^*$  à l'équat<sup>o</sup>  $f(x) = 2$ , vérifiant

$0 < a < 1 < b$

3.  $f(2) = 2 - \ln(2) \simeq 1,3 < 2$  ;  $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \simeq 2,6 > 2$   
 donc  $f(2) < f(b) < f(4)$  et par strict<sup>+</sup>  $\uparrow$  de  $f$  sur  $]1, +\infty[$   
 $2 < b < 4$

5) Notons  $P(n)$ : " $u_n$  est bien défini, et  $u_n \geq b$ "

\*  $u_0 = 4 \geq b$  (d'après 3°) donc  $P(0)$  vraie

\* si  $P(n)$  est vraie pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé:

$u_n \geq b > 0$  donc  $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$  est bien défini

et  $u_n \geq b \Rightarrow u_{n+1} \geq \ln(b) + 2$

Or  $b - \ln(b) = 2$  par définition! Donc  $\ln(b) = b - 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_{n+1} \geq b}}$$

d'où l'hérédité et la conclusion:  $P(n)$  vraie pour  $\forall n \in \mathbb{N}$

6)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - u_n + 2 = 2 - f(u_n)$

Or  $u_n \geq b$  donc  $f(u_n) \geq f(b) = 2$  par  $\uparrow$  de  $f$

d'où  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$  (u\_n) est décroissante

étant minorée par  $b$  (q.4) on en déduit que  $(u_n)$  converge vers  $\underline{l \geq b}$

$x \mapsto 2 + \ln(x)$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $[b, +\infty[$  donc par th du pt fixe,

$l$  vérifie  $l = \ln(l) + 2$  soit encore  $f(l) = 2$

Comme  $l \geq b$ , d'après 2°) la seule solut° est  $l = b$ .

7a. On pose  $g(x) = \ln(x) + 2$ .

$$g'(x) = \frac{1}{x} \text{ donc pour } x \geq b : 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$$

Par inégalité des accroissements finis sur  $[b, +\infty[$  ( $b \in [b, +\infty[, u_n \in [b, +\infty[$ )

$$|g(u_n) - g(b)| \leq \frac{1}{2} |u_n - b|$$

(22)

donc  $\underbrace{|u_{n+1}-b|}_{\geq 0} \leq \frac{1}{2} \underbrace{|u_n-b|}_{\geq 0}$  car  $(u_n) \searrow$  et  $u_n \rightarrow b$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2} (u_n - b)}$$

7b. Réurrence!

Pour  $n=0$  la propriété s'écrit  $0 \leq u_0 - b \leq 2$

Comme  $u_0 = 4$ ,  $2 \leq b \leq 4$

$$\Rightarrow 0 \leq u_0 - b \leq 2 \quad \text{CQFD.}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on suppose  $P(n)$  vraie.

$$\text{Alors } u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2} (u_n - b) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $6a$   $P(n)$

d'où  $P(n+1)$

Pour récurrence on a donc:  $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{0 \leq u_n - b}_{\substack{\uparrow \\ u_n \geq b \\ \text{justifié en haut}}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

8a. import numpy as np.

def suite(n):

$u = 4$

for k in range(n):

$u = \text{np. log}(u) + 2$

return u

85. Il suffit pour cela de déterminer  $N$  où  $N$  est tel que (23)

$$\frac{1}{2^{N-1}} \leq \varepsilon$$

On peut aussi déterminer explicitement le " $N$ " qui convient:  $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \varepsilon \Rightarrow N \geq 1 - \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln 2}$

$N = 0$

while  $2^{**}(1-N) >= 10^{**}(-5):$

$N = N + 1$

print (suite(N))

détermination d'un tel entier  $N$  en le testant un par un!

21h36

Partie III.

9.  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $F$  une de ses primitives:

On a :  $\forall x > 0$ ,  $\Phi(x) = F(2x) - F(x)$  (donc  $\Phi \in \mathcal{C}^1$ , car  $F$  l'est)

$$\text{d'où } \Phi'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$$

$$= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$

)  $F' = \frac{1}{f}$  par définition!

$$= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{2x - 2\ln(2x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}$$

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}}$$

10.  $\forall x > 0$ ,  $2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$  ; de même  $x - \ln(x) > 0$

donc  $\Phi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2) - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x \leq 2}}$

Voici le tableau :

|           |             |            |            |
|-----------|-------------|------------|------------|
| $x$       | 0           | $2x$       | $+\infty$  |
| $\Phi(x)$ | $\parallel$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

11)  $\forall t > 0, \frac{1}{f(t)} > 0$  ; et  $x > 0 \Rightarrow x < 2x$

donc par positivité de l'intégrale,  $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \geq 0$

Par majorer, on majore  $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$  donc on minore  $f(t)$ .

On a après 1°)  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) \geq 1$  donc  $\frac{1}{f(t)} \leq 1$

Dès lors (en intégrant sur  $[x, 2x]$  avec  $x \leq 2x$ )

$$\boxed{\Phi(x) \leq \int_x^{2x} 1 \cdot dt = x}$$

12)  $0 \leq \Phi(x) \leq x$  donne direct<sup>mt</sup> par gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0.$$

En posant  $\Phi(0) = 0$  on obtient un prolong<sup>mt</sup> par continuité de  $\Phi$  en 0.

21647 20  
27614

Avec les infos précédentes :

13)

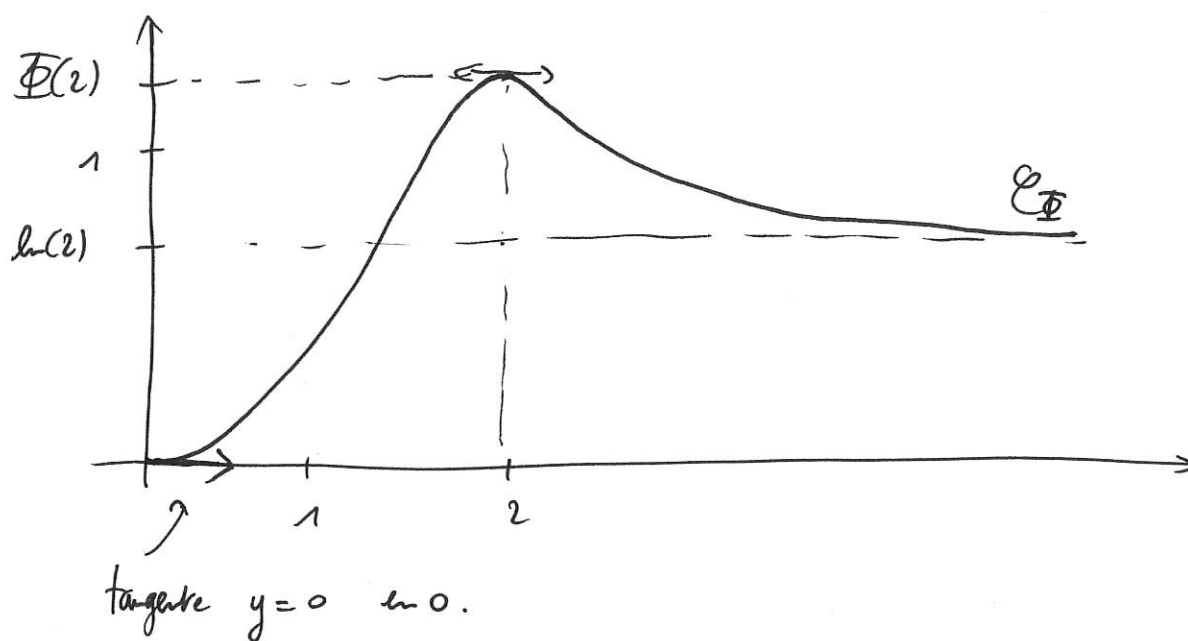
$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi'(0) = 0 \quad (\Rightarrow \text{tangente horizontale en } 0)$$

$$\Phi \nearrow \text{ sur } [0, 2] \text{ puis } \searrow \text{ sur } [2, +\infty[$$

$$\Phi(2) \approx 1,1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7.$$



Partie IV.

14.. On somme "par accumulation"

def rectangles ( $f, a, b, n$ ) :

```

s = 0
for k in range(1, n+1):
    s = s + (b-a)/n * f(a + k*(b-a)/n)
return s

```

15. On calcule  $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$  en passant les arguments (26)

suivants à rectangle:

$$* g: t \mapsto 1/f(t) = 1/(t - \ln(t))$$

$$* a = x$$

$$* b = 2 * x$$

$$* n = 1000$$

d'où:

def g(t):

return 1/(t - np.log(t))

def Phi(x):

return rectangle(g, x, 2 \* x, 1000)

16. On trace classiquement avec plt.plot à qui on fournit une liste d'abscisses  $X = [x_1, \dots]$  obtenue par un linspace et  $Y = [\Phi(x_1), \dots]$

import matplotlib.pyplot as plt

X = np.linspace(1, 10, 1000)

Y = [Phi(x) for x in X]

plt.plot(X, Y)

plt.show()