ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Concours Blanc n°1
Maths 1
24/11/2025
Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. ***S'il existe au moins un exercice dans lequel aucune question d'informatique n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.***

Exercice 1

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

2. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge, et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (d) Conclure que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne « Pile » avec la probabilité p $(0<p<1)$ et « Face » avec la probabilité $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier « Pile » .
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur a gagné » . On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

4. (a) Montrer que, si `m` est un entier naturel, le booléen

```
2*np.floor(m/2) == m
```

   vaut `True` si et seulement si `m` est pair.

(b) Programmer une fonction Python `jeu(p)` qui modélise l'expérience suivante, et renvoie 1 si le joueur a gagné et 0 si le joueur a perdu.

(c) À l'aide de cette fonction, proposer des instructions qui permettent d'afficher une approximation de la probabilité que le joueur gagne, dans le cas $p = \dfrac{1}{2}$.

5. (a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k+1)$:
   - pour $k \geqslant j$;
   - pour $k \in [\![0, j-1]\!]$.

   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$:
   - pour $k \geqslant j+1$;
   - pour $k \in [\![0, j]\!]$.

6. (a) Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}\, p\, \mathbb{P}_{(N=n)}(X = 2k+1)$.

   En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

   (b) En déduire que : $\forall\, k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = 2k+1) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

7. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t\right)$$

   (c) En déduire que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

8. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

   (b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

   (c) En déduire que $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit la matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **(attention au $\dfrac{1}{3}$!!)** et f l'endomorphisme canoniquement associé à S.

1. Calculer $f\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

3. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

4. On définit $F = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $G = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$.

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   On admet que G est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer une base (u, v) de F.
   On admet que $G = \mathrm{Vect}\big((1,2,4)\big)$ *; on note* $w = (1,2,4)$.

   (c) Montrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$.

5. Calculer $f(v+w)$ et $f(v-w)$. En déduire une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}')$ a tous ses coefficients égaux à 0 ou 1.

On cherche maintenant à généraliser ce résultat en dimension n ($n \geqslant 2$ quelconque). On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n}?} = \mathrm{Id}$ pour simplifier.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On note encore :

- $\mathrm{F} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = u\} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$
- $\mathrm{G} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = -u\} = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$.

On note $p = \dim(\mathrm{F})$ et $q = \dim(\mathrm{G})$.

6. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
7. (a) Que vaut l'endomorphisme $(f + \mathrm{Id}) \circ (f - \mathrm{Id})$?
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$.
   (c) Montrer que $p + q \geqslant n$.
8. On note $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de F et $(v_1, v_2, \dots, v_q)$ une base de G.
   (a) Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_q)$ est libre.
   (b) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et donner la matrice de f dans cette base.
9. Dans cette dernière question on suppose $p > q$.
   (a) Calculer $f(u_1 + v_1)$ et $f(u_1 - v_1)$.
   (b) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f a tous ses coefficients égaux à 0 ou 1.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) i. Programmer une fonction Python `suite(n)` qui prend en argument un entier `n` et renvoie la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$
       ii. Compléter les commandes suivantes, qui permettent d'afficher les points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
N = [k for k in ..........]
U = ..........
plt.scatter( ..... , ..... )
plt.show()
```

3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire un majorant de la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.
   (d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leqslant x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.