ESSEC 2, 2016

Corrigé sommaire

(dsl ; un meilleur suivra)

Première partie

1a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow (X>j-1) = (X=j) \overset{\text{disjointe}}{\cup} (X>j)$$

$$\Rightarrow P(\quad) = P(\quad) + P(\quad)$$

d'où le résultat

1b.
$$\sum_{j=1}^{p} j\,P(X=j) = \sum_{j=1}^{p} j\,P(X>j-1) - \sum_{j=1}^{p} j\,P(X>j)$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\,P(X>j) - \sum_{j=1}^{p} j\,P(X>j)$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} (j+1-j)\,P(X>j) + P(X>0) - p\,P(X>p)$$

absorbé

$$= \sum_{i=0}^{p-1} P(X>j) - p\,P(X>p)$$

2a i) Par définit° de l'existence de E, $\sum |k\,P(X=k)| = \sum k\,P(X=k)$ cv

ii) $\displaystyle\sum_{k\geq p+1}^{+\infty} k\,P(X=k) \xrightarrow{p\infty} 0$ comme reste partiel d'1 série cv

iii) $\forall k \geqslant p+1$ $\quad p\,P(X=k) \leq k\,P(X=k)$

$\Rightarrow$ les $\sum$ convergent
$$p\sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,P(X=k)$$

$$0 \leq p\,P(X>p) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,P(X=k)$$

d'où $p\,P(X>p) \xrightarrow{p\infty} 0$ par gendarmes.

iv On reprend 1b.

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{p} j\,P(X>j)}_{①} \underbrace{-\,p\,P(X>p)}_{②}$$

pour $p \to +\infty$ ① $\to E(X) = \mu$

② $\to 0$ (iii)

d'où $\sum P(X>j)$ cv et $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j) = \mu$ (et on a fait (v))

2b i) $v_{p+1} - v_p = P(X>p) \geq 0$: $(v_p)\nearrow$.

ii) Avec 1b. $\sum_{j=1}^{p} j\,P(X=j) = \sum_{i=0}^{p-1} P(X>j) - \overbrace{p\,P(X>p)}^{\geq 0}$

$\leq \sum_{i=0}^{p-1} P(X>j)$ $\forall p$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j\,P(X=j) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} P(X>j)}$$ (cette somme existe, on somme des termes ≥ 0)

iii) Les Σ partielles de la SATP $\sum j\,P(X=j)$ sont majorées donc cette série cv (abs, car elle est à termes ≥ 0)

2c. 2a montre : $E(X)$ existe $\Rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$ cv, et $\sum^{\infty} = E(X)$

2b montre $\sum P(X>j)$ cv $\Rightarrow E(X)$ existe

d'où l'équivalence demandée.

3a. On veut pour cela :

- $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $P(X=j) \geq 0$
- $\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j) = 1$

(↘ de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$*$ Si $P(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$ alors $P(X=j) \overset{1a}{=} \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \geq 0$

$*$ $\sum_{j=1}^{N} P(X=j) \underset{\text{telescop}}{=} 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \xrightarrow[N\infty]{} 1$

donc on a bien une loi de proba

3b. D'après 2c. ~~il suffit de montrer~~ cela équivaut à la cv de $\sum_j P(X>j)$

~~On~~ $E(X)$ existe $\Leftrightarrow \sum_j P(X>j)$ cv $\Leftrightarrow \sum_j \underbrace{\frac{1}{(j+1)^\alpha}}_{\sim \frac{1}{j^\alpha}\text{, SATP}}$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$ par Riemann.

3c. $P(X=j) \overset{\text{cf 3a}}{=} \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{j^\alpha(1+\frac{1}{j})^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right)$

3d i) sur $[0,1]$ $1+x$ ne s'annule pas $\to \mathcal{C}^1$ et

$f'(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} - \alpha = \alpha\left(\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}\right) \leq 0$ pour $x \geq 0$.

d'où f ↘ sur $[0,1)$

3d ii) En $x = 1/j \in [0,1)$ on obtient par ↘

$f(1/j) \leq f(0)$

$$1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha} - \frac{\alpha}{j} \leq 0$$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha} \leq \alpha/j \quad \underset{3c}{\Rightarrow} \quad P(X=j) \leq \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$ avec 2 ou 3 intermédiaires sans souci

3e $$j^{\alpha+1} P(X=j) = j\left(1 - (1+\underbrace{\frac{1}{j}}_{\substack{\to 0 \\ \text{pour } j\infty}})^{-\alpha}\right) \underset{j\to+\infty}{\sim} j \times \frac{\alpha}{j} = \alpha$$

d'où $\boxed{\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1} P(X=j) = \alpha.}$

3f X admet 1 variance ssi $\sum j^2 P(X=j)$ cv

Or 3e $\Rightarrow P(X=j) = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$

$\Rightarrow j^2 P(X=j) = \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$: série cv ssi $\alpha - 1 > 1$

ssi $\underline{\alpha > 2}$

Partie II

4) A_n réalisé $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $X_1 + \dots + X_k = n$

Or : * $X_i(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ donc il ne peut exister qu'au plus un tel k

* " donc $X_1 + \dots + X_k \geq k$: on a $k \leq n$

5)a. La liste des T est la liste des sommes cumulées !

$T_1 = X_1$
$T_2 = X_1 + X_2$ etc

d'où

```
def simul_T(n):
    return np.cumsum(simul_X(n))
```

b. D'après 4°) il suffit de chercher si $n \in [T_1, \dots, T_n]$ car si $k > n$ on ne peut pas avoir $T_k = n$.

d'où

```
def A(n):
    T = simulT(n)
    if n in T:
        return True
    return False
```

ou pour les élites

```
def A(n):
    return (n in simul_T(n))
```

6a. $u_1 = P(A_1)$

A_1 est réalisé ssi il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $X_1 + \dots + X_k = 1$

$X_i(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ donc $A_1 = (X_1 = 1)$

et $P(A_1) = P(X_1 = 1) = p_1$

6b. A_2 est réalisé ssi $X_1 = 2$

ou $X_1 + X_2 = 2$ ce qui équivaut à $X_1 = X_2 = 1$

disjoint (tq car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$)

d'où ~~$P(A_2) = P(X_1=2)$~~

$$A_2 = (X_1 = 2) \underset{\text{disjointe}}{\cup} \big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$$

(Si $k \geq 3$ on ne peut pas avoir $X_1 + \cdots + X_k = 2$)

$$\Rightarrow P(A_2) = P(X_1 = 2) + P\big((X_1 = 1) \overset{\text{indép}}{\cap} (X_2 = 1)\big)$$

$$P(A_2) = u_2 + u_1^2$$

6c i) $(\tilde{X}_i)_{i \in \mathbb{N}^*} = (X_i)_{i \geq 2}$ sont indép, de même loi que X_1, et indép de X_1 d'après l'énoncé !

ii) $$A_n \cap (X_1 = k) = \Big[\underbrace{\bigcup_{j=1}^{+\infty} (X_1 + \cdots + X_j = n)}\Big] \cap (X_1 = k)$$

A_n : "$\exists j$ tq $X_1 + \cdots + X_j = n$"

$$= \bigcup_{j=1}^{+\infty} \big((X_1 = k) \cap (X_1 + \cdots + X_j = n)\big)$$

$$= \bigcup_{j=2}^{+\infty} \big((X_1 = k) \cap (X_2 + \cdots + X_j = \underbrace{n-k}_{>0})\big)$$

(si $j = 1$, $(X_1 = k) \cap (X_1 = n) = \emptyset$) car $k \neq n$

$$= \bigcup_{j=1}^{+\infty} \big((X_1 = k) \cap (\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k)\big)$$

avec $X_j = \tilde{X}_{j-1}$ et chgt indice $j = j-1$

$$= (X_1 = k) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{+\infty} (\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k)\Big)$$

6c iii $P(A_n \cap (X_1=k)) = P(X_1=k) \times P\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} (\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j = n-k)\right)$

car $\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_j$ indep de X_1 (coalit°)

$= P(X_1=k) \times P(A_{n-k})$

en effet les $\tilde{X}_i$ ont m̄ loi que les X_i et sont mut. indep

donc $P(\cup(\Sigma \tilde{X}_i = n-k)) = P(\cup(\Sigma X_i = n-k))$
$= A_{n-k}$

en divisant par $P(X_1=k) \neq 0$ (hypothèse $p_j \neq 0$) $\boxed{P_{(X_1=k)}(A_n) = P(A_{n-k})}$

6d. FPT sur $(X_1=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

$u_n = P(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{P_{(X_1=k)}(A_n)}^{=0 \text{ si } k>n} \times P(X_1=k)$

$=0$ si $k>n$ car si $X_1>n$ A_n ne peut pas être réalisé

$= \sum_{k=1}^{n} P(A_{n-k}) p_k$

⚠ terme $k=n$: $\cancel{P(A_0) \times p_n}$ $\cancel{= u_0 \times p_n}$

$P_{(X_1=n)}(A_n) = 1$ (si $X_1=n$, A_n est réalisé !)

d'où $P_{(X_1=n)}(A_n) \times P(X_1=n)$
$= p_n = u_0 p_n$

$\Rightarrow \boxed{u_n = \sum_{k=1}^{n} p_k u_{n-k}}$ CQFD

7.a. Classique de la loi $\mathcal{G}(p)$: $P(X>k) = q^k$

ici $p=\lambda$ $\Rightarrow \boxed{P(X_1>k) = (1-\lambda)^k}$

7b. $P_{(X_1>k)}(X_1=k+1) = \dfrac{P((X_1=k+1)\cap(X_1>k))}{P(X_1>k)} = \dfrac{P(X_1=k+1)}{P(X_1>k)} = \underline{\underline{\lambda}}$

(~~[illegible]~~

7c Réc forte avec 6d

* $P(A_1) = P(X_1 = 1) = \lambda$ (cf 6a)

* Si $P(A_k) = \lambda$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$

alors $P(A_n) = P(X_1 = 1) \times \lambda + P(X_1 = 2) \times \lambda + \dots + P(X = n) . \lambda + P(X_{n+1})$

$= \lambda P(X_1 \leq n) + P(X_{n+1})$

$= \lambda(1 - P(X_1 > n)) + P(X_{n+1})$

$= \lambda(1 - (1-\lambda)^n) + \lambda(1-\lambda)^n$

$\boxed{P(A_n) = \lambda}$

7d Tirage de $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$

```
def simul_X(n):
    return rd.geometric(1/3, n)
```

7e fonc(n) mesure la fréquence de réalisat° de l'évt A_n sur 100000 expériences ; donc renvoie 1 approx de $P(A_n)$.

On trace 1 rep. en bâtons de $P(A_n)$ = 1, 2, 3, ..., 40.

On voit des barres de hauteur quasi-cste à $\simeq 0,33$

$\Rightarrow P(A_n) = \lambda = 1/3 \quad \forall n$.

8. ~~Si~~ $\sum_{i=3}^{+\infty} p_i = 1 - p_1 - p_2$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
$= 0$

$\Rightarrow$ pour $i \geqslant 3$, $p_i = 0$

8b. 6d donne donc

$\forall n \geqslant 2 \quad u_n = u_{n-1} p_1 + u_{n-2} p_2$
$= u_{n-1} p + u_{n-2}(1-p)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} p + u_{n-2}(1-p) \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

8c Récurrence : ~~Base~~ $M^0 = I_2$ et $\left[\text{exp de chaste}_{n=1}\right] = I_2$ donc $\mathcal{P}(1)$

si $M^{n-1} = ~~\ldots~~ \ldots$ en multipliant par M on trouve ce qu'il faut.

8d. $u_0 = 0$
$u_1 = p_1 = p$
8b donne par réc ~~...~~ : $\forall n \geqslant 2 \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

$= M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

avec l'express° de 8c

8d $\quad 0 < p < 1$ donc $|p-1| < 1$ donc $\boxed{\lim_{n\infty} u_n = \dfrac{1}{2-p}}$

(9)

9. $E(T_k) = E(\sum X_i)$ lin de l'esp (qui montre l'existence de $E(T_k)$)

$$= \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = \underline{\underline{k\mu}}$$

10 a. Par indép des X_i

$$V(T_k) = \sum V(X_i) = \underline{\underline{k\sigma^2}}$$

10 b Bienaymé-T. (T_k admet 1 var.)

$$P(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon) = P(|T_k - E(T_k)| \geq k\varepsilon)$$

$$\leq \frac{V(T_k)}{(k\varepsilon)^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}}}.$$

10 c $P\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right)$

$$= P\left(\left|\frac{T_k}{k} - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$= P(|T_k - k\mu| < k\varepsilon)$$

$$= 1 - P(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \quad (10b)$$

donc $\underbrace{1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 1} \leq P(\dots) \leq \underbrace{1}_{\text{cst 1 proba}}$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right) = 1}$$

11a.

à ω fixé :

$$\left.\begin{array}{ll} * \text{ si } X_i(\omega) \leq m, & Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) \\ & Z_i^{m}(\omega) = 0 \\ * \text{ si } X_i(\omega) > m, & Y_i^{(m)}(\omega) = 0 \\ & Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) \end{array}\right]$$

ds les 2 cas $\underline{Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i}$

11b. $Z_1^{(m)}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (prend des valeurs de X_1)

On note $Y_1^{(m)} = Y_1$, $Z_1^{(m)} = Z_1$

et $P(Z_1 = k) = 0$ si $k \leq m$
$= P(X_i = k)$ si $k > m$

Ds ts les cas $0 \leq k P(Z_1 = k) \leq \underbrace{k P(X_1 = k)}_{\text{Tg série cv}}$

$\Rightarrow$ Z_1 admet 1 esp.

$N \geq m$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP(Z_1 = k) = \sum_{k=m+1}^{N} k P(X_1 = k) \xrightarrow{N\infty} \sum_{k=m+1}^{+\infty} k P(X_1 = k)$

$$\Rightarrow E(Z_1) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} k P(X_1 = k) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} k \frac{\alpha}{k^{1+\alpha}} = \underline{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{k^{\alpha}}}$$

3d(ii) on est ds les bonnes hypothèses

ces sommes convergent b'.

On contrôle maintenant ce majorant par comparaison $\Sigma - \int$

$\sum_{i=m+1}$

$\forall i \geq m+1 : \quad \forall t \in [i-1, i] \ , \ \frac{\alpha}{t^\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{i^\alpha}$ par $\searrow$ de $t \mapsto 1/t^\alpha$

d'où en intégrant :

$$\underbrace{\frac{\alpha}{i^\alpha}\int_{i-1}^{i} 1\,dt}_{\frac{\alpha}{i^\alpha}} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{t^\alpha}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul} \\ \text{de primitive}}}{=} \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(i-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{i^{\alpha-1}}\right)$$

en sommant

$$\sum_{i=m+1}^{M} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{1}{m^{\alpha-1}} - \frac{1}{M^{\alpha-1}}\right)}_{\sum \text{ téléscopiq}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

<u>iii</u> en faisant tendre $M \to +\infty$ (la série $\sum \frac{\alpha}{i^\alpha}$ cv, $\alpha > 1$)

$$\boxed{E(Z_1) \leq} \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

i

<u>iv</u> $\alpha > 1$ donc $\quad \underbrace{0 \leq E(Z_1)}_{Z_1(\Omega)\subset \mathbb{N}^*} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}\underbrace{\frac{1}{m^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow{m\infty} 0} \quad \Rightarrow E(Z_1) \xrightarrow{m\infty} 0$

<u>v</u> 11a $\quad X_1 = Y_1 + Z_1 \quad$ donc $E(Y_1) = E(Z_1 - X_1)$ existe

$$\underbrace{E(X_1)}_{=\mu} = E(Y_1) + \underbrace{E(Z_1)}_{\to 0} \quad \Rightarrow \boxed{E(Y_1) \xrightarrow{m\infty} \mu}$$

c (2) ~~$\not\exists$~~ On a $Y_1 \leq m$

(car $Y_1 = X_1$ si $X_1 \leq m$, et $Y_1 = 0$ sinon)

$*$ si $X_1(\omega) \leq m$, $Y_1^2(\omega) = \underbrace{Y_1(\omega)}_{= X_1(\omega)} \times \underbrace{Y_1(\omega)}_{\leq m} \leq m X_1(\omega)$

si $X_1(\omega) > m$, $Y_1^2(\omega) = 0 \leq m X_1(\omega)$

$\Rightarrow Y_1^2 \leq m X_1$ ds ts les cas.

d. $\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \xrightarrow{m \infty} 0$

donc par défin° de la lim:

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq \varepsilon$

e. Avec Ma on a encore

$T_k = \Sigma X_i = \Sigma (Y_i + Z_i) = \Sigma Y_i + \Sigma Z_i$

$\boxed{T_k = U_k + V_k}$

f (i) les X_i ont m̄ loi que X_1

donc les $E(Z_i)$ existent, et $\forall i$ $E(Z_i) = E(Z_1) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{m^{\alpha-1}}$

En sommant de $i = 1$ à k, V_k admet 1 esp.

$E(V_k) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot k \times \frac{1}{m^{\alpha-1}}$

f(ii) C'est Markov avec $X = V_k$ (on est ss les bonnes hypothèses) et $t = k\varepsilon$.

$$P(V_k \geq k\varepsilon) \leq \frac{E(V_k)}{k\varepsilon} \leq \frac{k \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}}{k\varepsilon} = \underline{\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}}$$

g(i) $E(U_k) = E(\cancel{\ }T_k) - E(V_k)$ et $E(U_k) \leq E(T_k)$ car V_k à val. ≥ 0

$= k\mu - E(V_k)$ $\leq k\mu$

$E(U_k) \underset{f(i)}{\geq} k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$

g(ii) final^t $\cancel{k\mu \leq E(U_k)}$

$$k\mu - k\varepsilon \overset{(2)}{\leq} k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq E(U_k) \overset{(1)}{\leq} k\mu$$

définit° de ε

d'où $\left| E(U_k) - k\mu \right| \leq k\varepsilon$ avec les inég. (1) et (2)

(iii) On démontre une inclus° entre év^{ts}

si $|U_k - k\mu| \geq 2k\varepsilon$:

→ $U_k - k\mu \geq 2k\varepsilon$

$\Rightarrow U_k - E(U_k) = \underbrace{U_k - k\mu}_{\geq 2k\varepsilon} + \underbrace{k\mu - E(U_k)}_{\geq -k\varepsilon} \geq k\varepsilon$

→ ou $U_k - k\mu \leq -2k\varepsilon$

$\Rightarrow U_k - E(U_k) = \underbrace{U_k - k\mu}_{\leq -2k\varepsilon} + \underbrace{k\mu - E(U_k)}_{\leq k\varepsilon} \leq -k\varepsilon$

Ds ts les cas

$$|U_k - E(U_k)| \geq k\varepsilon$$

On a montré :
$$\left(|U_k - k\mu| \geq 2k\varepsilon\right) \subset \left[|U_k - E(U_k)| \geq k\varepsilon\right]$$

Par croiss. de la proba $\left(A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)\right)$

on a ce qu'il faut.

<u>iv</u> $U_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$

les X_i sont mut. indep donc les Y_i aussi (coalit°)

donc $V(U_k)$ existe

et $V(U_k) = \sum \underbrace{V(Y_i)}_{\leq m\mu \ (11c)} \leq mk\mu$.

↳ pour $i=1$ mais s'étend à $\forall i$ car les X_i suivent la = loi

<u>v</u>

BT $\quad P(|U_k - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \underset{(iii)}{\leq} P(|U_k - E(U_k)| \geq k\varepsilon) \underset{BT}{\leq} \frac{V(U_k)}{k^2\varepsilon^2} = \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2} = \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$

(U_k admet 1 variance)

h (i)

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{\leq 1} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$ donne ce qu'il faut.

Si $A\cap B$ est réalisé

inég tri

alors $|T_k - k\mu| = |U_k + V_k - k\mu| \leq \underbrace{|U_k - k\mu|}_{\substack{\leq 2k\varepsilon \\ (B \text{ réalisé})}} + \underbrace{V_k}_{\substack{<k\varepsilon \\ (A \text{ réalisé})}} \leq 3k\varepsilon$

donc $T_k \in]k\mu - 3k\varepsilon, k\mu + 3k\varepsilon[$ est réalisé

Ainsi ~~A∩B~~ $A\cap B \subset [\,|T_k - k\mu| < 3k\varepsilon]$

donc $P(|T_k - k\mu| < 3k\varepsilon) \geq P(A\cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ CQFD

(iii) On recolle les morceaux :

$P(B) = P\left(U_k \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right) = 1 - P(|U_k - k\mu| \leq 2k\varepsilon) \underset{g(v)}{\geq} 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$

$P(A) = P(V_k < k\varepsilon) \underset{\substack{f(ii) \\ \text{passage} \\ \text{au contraire}}}{\geq} 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$ pour $m \geq m_0$

d'où $P(A) + P(B) - 1$ est le minorant attendu ds h (iii) CQFD

(iv) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Il existe m_0 défini comme en 1d.

Si k est assez grand, on aura $\sqrt{k} \geq m_0$, donc on peut appliquer (iii) à tt entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$

de $\sqrt{k} \leq m \leq 2\sqrt{k}$

on tire $2^{1-\alpha} k^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq m^{1-\alpha} \leq k^{\frac{1-\alpha}{2}}$ $\quad (t \mapsto t^{1-\alpha} \searrow, \alpha > 1)$

$\times \left(-\frac{\alpha}{\alpha-1} < 0\right)$

$$-\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \geq -\frac{\alpha}{\alpha-1} k^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

et $\frac{\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} \leq \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} \leq \frac{2\mu}{\sqrt{k}\,\varepsilon^2} \Rightarrow -\frac{m\mu}{k\varepsilon^2} \geq \frac{-2\mu}{\sqrt{k}\,\varepsilon^2}$

d'où
$$1 \geq P(T_k \cdots) \geq 1 - \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha-1} k^{\frac{1-\alpha}{2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{k}\,\varepsilon^2}}_{\xrightarrow{k\infty} 0}$$

c'est le m̄ évén^t, écrit différemment.

et $\lim\limits_{k \to +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon\right[\right) = 1$ par gendarmes