

Exercice 1

1a. On majore la fonction à intégrer:

Soit $m \in \mathbb{N}$: $\forall t \in [0, x]$ $0 \leq t^2 \leq x^2 < 1$ (↑ de la fct° carré sur $\mathbb{R}_+$)
 $\Rightarrow 1 - t^2 \geq 1 - x^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-t^2} \leq \frac{1}{1-x^2}$$

$$\times t^m, t \geq 0 \Rightarrow \frac{t^m}{1-t^2} \leq \frac{t^m}{1-x^2}$$

En intégrant sur $[0, x]$ (des fct° continues); et $0 \leq x$ donc bons ds le bon ordre

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt &\leq \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2} dt = \frac{1}{1-x^2} \int_0^x t^m dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{1-x^2} \frac{x^{m+1}}{m+1} \leq \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

avec $x \leq 1$.

On a bien:

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{1-x^2}}$$

De plus cette intégrale est positive car $t \geq 0$ et $1-t^2 \geq 0$ sur $[0, x] \subset [0, 1]$

(2)

$$15. \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

donc le théorème des gendarmes donne :

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0}$$

2a. $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} (t^2)^j$ et on reconnaît une somme géométrique finie, de raison $t^2 \neq 1$.

Ainsi : $\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$ par formule usuelle.

2b. Cette dernière égalité est vraie pour tout $t \in [0, 1[$, donc pour tout $t \in [0, x]$ avec $0 < x < 1$

On intègre donc : $\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{1-t^{2k}}{1-t^2} \right) dt$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

(linéarité de l'intégrale)

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1} \right]_0^x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$$

2c. le terme de gauche de l'égalité précédente sv la somme partielle d'ordre k de $\sum \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}}$. il s'agit donc de prouver la limite $k \rightarrow +\infty$.

$$\text{On d'après 1b : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt = 0$$

$$\text{ce qui donne } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} \right) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

Ce qui donne la convergence de la série demandée, et

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Ed. On a : } \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \right) \\ &= \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \\ &= \underline{\underline{\quad \quad \quad}} \end{aligned}$$

3. N compte le rang du 1^{er} succès (obtenir Pile, avec proba p) dans une success^o de lancers indépendants.

On a donc $N \sim G(p)$

4a. $2 * np.floor(m/2)$ renvoie le nombre $2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

- si m est pair, $m = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors: } 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2 \lfloor k \rfloor = 2k = m.$$

- si m est impair, $m = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2 \lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = 2k = m-1 \neq m$$

Ainsi $2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si m est pair

ce qui donne le résultat attendu.

4b.

```
import numpy as np
```

```
import numpy.random as rd
```

```
def jeu(p):
```

```
    N = rd.geometric(p)
```

```
    X = rd.randint(1, N+1)
```

```
    if 2 * np.floor(X/2) == X: # boule paire
```

```
        return 0
```

```
    return 1
```

4c. On approxime la proba de gain à la fréquence à laquelle (5)
le joueur gagne sur un grand nombre d'expériences.

On peut proposer

$c = 0$ # compteur de victoires

for k in range(10000):

 if jeu(1/2) == 1:

$c = c + 1$

print($c / 10000$) # fréquence de gain.

16h40

5a. $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ est la probabilité, sachant que l'urne
contient les boules (1), (2), ..., (2j), de tirer la boule $2k+1$

* si $k \geq j$, $2k+1 \geq 2j+1$ donc la boule $2k+1$ n'est pas
dans l'urne ! Ainsi $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geq j}$

* si $k \in [0, j-1]$, la boule $2k+1$ est dans l'urne ; et
par équiprobabilité $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } 0 \leq k \leq j-1}$

5b. C'est assez similaire !

* si $k \geq j+1$, $2k+1 \geq 2j+3$ donc la boule $2k+1$ n'est
pas dans l'urne qui contient (1), ..., (2j+1)

donc : $\boxed{\forall k \geq j+1, P_{(N=2^{j+1})}(X=2k+1)=0.}$

(6)

* Si $0 \leq k \leq j$, $1 \leq 2k+1 \leq 2^{j+1}$ et la boule $2k+1$ est bien dans l'urne :

$\boxed{\forall k \in [0, j] , P_{(N=2^{j+1})}(X=2k+1) = \frac{1}{2^{j+1}}}$ (par équiprobabilité)

6a. $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (loi géo)

donc $(N=n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (SCE)

Par probas totales (FPT) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=2k+1) \times P(N=n)$$

$\boxed{P(X=2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} p P_{(N=n)}(X=2k+1)}$

En scindant en entiers pairs : $n=2^j, j \in \mathbb{N}^*$

et impairs : $n=2^{j+1}, j \in \mathbb{N}$.

$$P(X=2k+1) = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j} p P_{(N=2^{j+1})}(X=2k+1) + \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2^{j-1}} p P_{(N=2^j)}(X=2k+1)$$

D'après 5a et 5b, les sommes sont finies $\frac{1}{2}$ (car en les probas conditionnelles sont nulle), ce qui donne :

$$P(X=2k+1) = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j} p \underbrace{P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)}_{\substack{=0 \text{ si } j \leq k-1 \\ = \frac{1}{2^{j+1}} \text{ si } j \geq k}} + \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2j-1} p \underbrace{P_{(N=2j)}(X=2k+1)}_{\substack{=0 \text{ si } j \leq k \\ = \frac{1}{2^j} \text{ si } j \geq k+1}} \quad (7)$$

$$P(X=2k+1) = \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j} p}{2^{j+1}} + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j-1} p}{2^j}$$

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2^j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2^{j+1}} \right)$$

6b. On utilise (2d) avec $(p, q) \in]0, 1[^2$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=2k+1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \right)$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k} (1+t)}{1-t^2} dt \quad (\text{linéarité})$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k} (1+t)}{(1-t)(1+t)} dt$$

$$= \left[\frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt \right]$$

(8)

7a. $\forall t \in [0, q]$:

$$1+t \geq 1$$

$$(1-t)^2 \leq (1-q)^2$$

$$\text{d'où} \quad \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leq \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

et en intégrant sur $[0, q]$:

$$0 \leq \underbrace{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt}_{\geq 0} \leq \frac{1}{(1-q)^2} \int_0^q t^{2n+2} dt = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{q^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(avec $|q| < 1$)

d'où la limite recherchée.

7b. Avec 6b :

$$\sum_{k=0}^n P(X=2k+1) = \sum_{k=0}^n \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\sum_{k=0}^n t^{2k} \right) dt \quad \text{par linéarité}$$

↪ Somme géo de raison t^2 , $t^2 \neq 1$

$$= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1-t^{2(n+1)}}{1-t^2} dt$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)} dt$$

$$\sum_{k=0}^n P(X=2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt$$

$$= \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$$

7c. D'après l'énoncé :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1] \quad (\text{tirage d'une boule impaire})$$

d'où $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)$ par une disjointe

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X=2k+1) \right)$$

$$\left(P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$$

avec l'express° de 7b
et la limite de 7a.

16h39

8a. On met au m dénominateur à droite :

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + a+b+c}{(1-t)^2(1+t)}. \end{aligned}$$

Par identification on cherche alors a, b, c + q
des coefficients

(10)

$$\begin{cases} -a + b = 0 & (\text{en } t^2 \text{ du numérateur}) \\ -2b + c = 0 & (\text{en } t) \\ a + b + c = 1 & (\text{coeff constant}) \end{cases}$$

$$(=) \begin{cases} a = b \\ c = 2b \\ 4b = 1 \end{cases}$$

$$(=) \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 1/4 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

8b. En reprenant Z_C et par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{p}{q} \left(\underbrace{\frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1-t} dt}_a + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1+t} dt}_b + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2} dt}_c \right) \\ &= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} [-\ln|1-t|]_0^q + \frac{1}{4} [\ln|1+t|]_0^q + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^q \right) \\ &= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} (-\ln(1-q)) + \frac{1}{4} \ln(1+q) + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{1-q}}_{=p} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1-p}{p} \right) \right) \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{p}{4q} \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right)$$

8c. Or $0 < q < 1$ donc $1+q > 1-q > 0$

$$\Rightarrow \frac{1+q}{1-q} > 1$$

ce qui montre que $P(A) > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{p}{4q} \times \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0 \quad \text{1ch65}$$

Exercice 2 (40')

11

$$1) S \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - y - \frac{z}{2} \\ -4x + y - z \\ -8x - 4y + z \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = \frac{1}{3} \left(x - y - \frac{z}{2}, -4x + y - z, -8x - 4y + z \right)$$

2). On a :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \frac{z}{2} = 0 \\ -4x + y - z = 0 \\ -8x - 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \frac{z}{2} = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ -12y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \frac{z}{2} = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Ker}(f) = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}}$$

f est donc un endomorphisme injectif, donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

3) Il est plus pratique de passer par S .

Montrons que $S^2 = I_3$:

$$S^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times 9 I_3 = I_3$$

$$1 \times 1 + (-1) \times (-4) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-8) = 9$$

Comme $S = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_e)$ on en déduit $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$

4) a. • $F \subset \mathbb{R}^3$

• $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ par linéarité donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ et $F \neq \emptyset$

• Si $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) \quad (\text{linéarité})$$

$$= \underline{\lambda u + v} \quad (u, v \in F)$$

d'où $\lambda u + v \in F$.

F est donc bien un sev de $\mathbb{R}^3$

4) b. On résout explicitement $f((x, y, z)) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x - y - \frac{1}{2}z) = x \\ \frac{1}{3}(-4x + y - z) = y \\ \frac{1}{3}(-8x - 4y + z) = z \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x - y - \frac{1}{2}z = 3x \\ -4x + y - z = 3y \\ -8x - 4y + z = 3z \end{cases} \quad (\times 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -4x - 2y - z = 0 \\ -8x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -4x - 2y$$

$$\text{donc } F = \{ (x, y, -4x - 2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$F = \text{Vect}((1, 0, -4), (0, 1, -2))$$

Cette dernière famille est génératrice de F , libre car ce sont 2 vecteurs non colinéaires. Donc $\boxed{\{(1, 0, -4), (0, 1, -2)\}}$ est une base de F

LC $B = ((1, 0, -4), (0, 1, -2), (1, 2, 4))$ est de cardinal 3;
 $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc B est une base ssi elle est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0, 0, 0)$

$$\text{On a: } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 12\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

(14)

B est bien une base de $\mathbb{R}^3$

4c. Par définition :

$$f(u) = u \quad (u \in F)$$

$$f(v) = v \quad (v \in F)$$

$$f(w) = -w \quad (w \in G)$$

donc $\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) $f(v+w) = v-w$ d'après ci-dessus et la linéarité de f
 $f(v-w) = f(v) - f(w) = v+w$

Si $B' = (u, v-w, v+w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ on aura bien

$$\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ composé de 0 et de 1}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \nwarrow$
 $f(u) = u \quad f(v-w) = v+w \quad f(v+w) = v-w$

Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 u + \lambda_2 (v-w) + \lambda_3 (v+w) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 u + (\lambda_2 + \lambda_3)v + (-\lambda_2 + \lambda_3)w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Par liberté de (u, v, w) on déduit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_3 - \lambda_2 = 0$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la liberté de B'

$\mathcal{B}'$ est de card 3 = dim $\mathbb{R}^3$ donc est une base de $\mathbb{R}^3$

(15)

$\mathcal{B}'$ convient

17h20
(-15')

6) Soit $u \in F \cap G$:

$u \in F$ donc $f(u) = u$; $u \in G$ donc $f(u) = -u$

d'où $\underline{u = -u}$, puis $\underline{u = 0_E}$

Récapitulatif, $0_E \in F \cap G$ car ce sont deux sev.

On a donc

$$F \cap G = \{0_E\}$$

$$7a) (f + \text{Id}) \circ (f - \text{Id})$$

$$= f \circ f + f \circ \text{Id} - \text{Id} \circ f - \text{Id} \circ \text{Id}$$

$$= f^2 + f - f - \text{Id} = f^2 - \text{Id} = \underline{\underline{\tilde{0}}} \text{ car } f \circ f = \text{Id}$$

(endo. nul)

7b. Soit $y \in \text{Im}(f - \text{Id})$: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tq $y = (f - \text{Id})(x)$

$$\text{Alors } (f + \text{Id})((f - \text{Id})(x)) = \underbrace{(f + \text{Id}) \circ (f - \text{Id})}_{= \tilde{0}}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} :$$

Ce qui montre bien que $\boxed{y = (f - \text{Id})(x) \in \text{Ker}(f + \text{Id})}$

(16)

7c. On applique le théorème du rang à $f - \text{Id} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Im}(f - \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$$

$$n = \dim \text{Im}(f - \text{Id}) + \dim (F)$$

$$\dim \text{Im}(f - \text{Id}) = n - \dim (F) = n - p$$

$$\text{On } \text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f + \text{Id})$$

$$\text{donc } \dim(\text{ — }) \leq \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) = \dim(G) = q$$

$$\text{On en déduit } n - p \leq q \quad \text{d'où } \boxed{p + q \geq n}$$

13/30

-15'

20/58

8a. l'hypothèse clé est ici $F \cap G = \{0\}$.

Soient $\lambda_1 \dots \lambda_p, \mu_1 \dots \mu_q$ des réels tq

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^q \mu_i v_i = 0$$

$$\text{Alors } \underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i}_{\in F} = - \underbrace{\sum_{i=1}^q \mu_i v_i}_{\in G} \in F \cap G ; \text{ donc } \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^q \mu_i v_i = 0$$

$$\text{puis } \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \text{ (liberté des } u_i)$$

$$\text{et } \mu_1 = \dots = \mu_q = 0 \text{ (— } v_i)$$

Tous les scalaires introduits sont nuls;

$$\text{on en déduit } \boxed{(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \text{ libre}}$$

85. Comme la famille vne en $\mathcal{B}_A$ est libre, de cardinal $p+q$, on a $p+q \leq n$.

Mais on avait $p+q \geq n$ en $\mathcal{F}_C$: finalement $p+q=n$

et $(u_1 \dots u_p, v_1 \dots v_q)$ est libre, de cardinal $n = \dim \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$

Comme $f(u_i) = u_i$ ($u_i \in F$) on déduit

et $f(v_i) = -v_i$ ($v_i \in G$)

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix}}^p & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} (0) \\ \\ \\ \end{matrix}}^q \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ (0) \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

(diagonale, avec
p "1" puis q "-1"
sur la diagonale)

Zinab

Pa. $u_1 \in F$ et $v_1 \in G$

donc $f(u_1) = u_1$
et $f(v_1) = -v_1$

On en déduit $f(u_1 + v_1) = u_1 - v_1$
et $f(u_1 - v_1) = u_1 + v_1$

3b. Il faut simplifier de la question 5.

$p > q$ donc on peut considérer les vecteurs

$$B' = (u_1 + v_1, u_1 - v_1, u_2 + v_2, u_2 - v_2, \dots, u_q + v_q, u_q - v_q, u_{q+1}, \dots, u_p)$$

Pourquoi? D'après 3a, pour $\forall i \in [1, q]$

$$f(u_i + v_i) = u_i - v_i$$

$$f(u_i - v_i) = u_i + v_i$$

De sorte que le "bloc" correspondant de $\text{Mat}(f, B')$ sera

$$\begin{pmatrix} f(u_i + v_i) & f(u_i - v_i) \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_i + v_i \\ u_i - v_i \end{matrix}$$

Pour les derniers vecteurs de B' , $f(u_i) = u_i$ donc cela place un "1" sur la diagonale.

Il reste à montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^n$

• Elle comporte $2q + (p - q) = p + q = n$ vecteurs.

• Si $\sum_{i=1}^q \lambda_i (u_i + v_i) + \sum_{i=1}^q \mu_i (u_i - v_i) + \lambda_{q+1} u_{q+1} + \dots + \lambda_p u_p = 0$

$$\text{alors } (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_q + \mu_q)u_q + (\lambda_q - \mu_q)v_q + \lambda_{q+1}u_{q+1} + \dots = 0$$

d'où par liberté de $\underline{B}$:

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \vdots \\ \text{etc} \end{array} \right.$$

et on obtient tous les λ_i, μ_i nuls

$\Rightarrow B'$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette base

$$\text{tar}(f, B') =$$

8) bien composé uniquement de 0 et de 1.

205

32 50

Exercice #3

(10)

$$1) u_0 = (1+1) = \underline{\underline{2}}$$

$$u_1 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$u_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$$

2) ~~On construit le produit terme à terme.~~

~~$u = 2$~~

~~for k in range(1, 51):~~

~~$u = u * (1 + 1/(2*k))$~~

~~print(u)~~

2a. $\forall k \in \overline{1, n} \cap \mathbb{D}$, on a $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times \underbrace{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 1} \geq \underline{\underline{2}}$

2b. En isolant le dernier terme :

$$u_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

d'où $\underline{\underline{\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1}}$ et comme (u_n) sv à terme > 0 (2a.)

on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ sv croissante}}$

Imp $\rightarrow$ sv à la fin.

3a. Tant à la crème et points assurés.

$f: x \mapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

d'au le tableau

x	-1	0	$+\infty$
f'	$ $	$+$	$-$
f	$ $	0	$\searrow$

avec $f(0) = 0$

On observe alors: $\forall x > -1, f(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x}$$

$$3b. \forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \left(\begin{array}{l} \text{série géo.} \\ \text{cr 1} \end{array}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{d'au } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq 2}$$

4) Par $\nearrow$ de l'exp: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e^2$

(u_n) est croissante, majorée par e^2 , donc cr vers $l \in \mathbb{R}$.

Comme: $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq e^2$, on obtient à la limite $n \rightarrow +\infty$: $\boxed{2 \leq l \leq e^2}$

5a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in [1, e^2]$, donc $l > 0$

(11)

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(l)$$

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

on en déduit, pour $n \rightarrow +\infty$, la cv de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

$$\text{d'où } \boxed{\ln(l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}$$

5b. Il suffit d'écrire :

$$\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) = \ln(l) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}$$

5c. En reprenant la majorat° de 5a :

$$\forall k \geq n+1, \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

De plus, les $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ étant ≥ 1 , il est clair d'après 5b que $\boxed{\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \geq 0}$

(ou encore: $(u_n)^\uparrow, u_n \rightarrow l$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$
 $\Rightarrow \frac{l}{u_n} \geq 1$
 $\Rightarrow \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \geq 0$)

5d. On veut de justifier que $\boxed{l - u_n \geq 0}$

De plus: $\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \frac{l}{u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{l} \geq \exp\left(-\frac{1}{2^n}\right) \text{ par } \downarrow \text{ de la fct inverse}$$

$$\Rightarrow u_n \geq l \exp\left(-\frac{1}{2^n}\right) \quad (\times l, \text{ avec } l > 0)$$

$$\Rightarrow l - u_n \leq l - l \exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{l - u_n \leq l \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right)}$$

5e). On peut procéder comme en 5a et étudier $x \mapsto 1 - e^{-x} - x \dots$

on applique 5a, à $x = -1 + e^{-t} \geq \underline{\underline{-1}} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$.

$$\text{Alors: } \ln(1 + (-1 + e^{-t})) \leq -1 + e^{-t}$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-t}) \leq -1 + e^{-t}$$

$$\Rightarrow -t \leq -1 + e^{-t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{1 - e^{-t} \leq t}}$$

) $\times (-1)$

En reprenant 8d et en utilisant l'inégalité qu'on vient

(12)

obtenir avec $x = 1/2^n$: $1 - e^{-1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ en multipliant par $l > 0$

$$\text{donc } 0 \leq l - u_n \leq l(1 - e^{-1/2^n}) \leq l \times \frac{1}{2^n}$$

$\sum_n \frac{l}{2^n}$ car (série géom de raison $1/2 \in]-1, 1[$)

donc par comparaison de SAMP, $\left| \sum_n (l - u_n) \text{ converge} \right|$

Retour sur 2c.

On peut utiliser : $u_0 = 2$
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n$

$N = [0, 1, 2, \dots, 20]$

et code :

```
def suite(n):  
    u = 2  
    L = [2]  
    for k in range(1, n+1):  
        u = (1 + 1/2**k) * u  
        L.append(u)  
    return L
```

```
ii)  
import ...  
N = [k for k in range(21)]
```

```
U = suite(20)  
plt.scatter(N, U)  
plt.show()
```

$U = [u_0, u_1, \dots, u_{20}]$