TD6 : Réduction

Exercice 1.

1. Diagonaliser les matrices suivantes, en recherchant le spectre par pivot de Gauss.
   On prendra soin de suivre les contraintes suivantes : on écrira $M_i = P_i D_i P_i^{-1}$ avec :
   - Les coefficients diagonaux de D_1 rangés par ordre croissant ;
   - P_3 inversible de seconde ligne $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$, et D_3 diagonale dont les coefficients sont rangés par ordre croissant.
   - P_5 triangulaire supérieure, de première ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
2. Donner l'expression de $(M_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}6 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Un pivot délicat)**.** Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 7A$. Diagonaliser A.
2. Déterminer le rang de B, et celui de $B - 2I_3$. En déduire deux valeurs propres de B et les dimensions de leurs sous-espaces propres associés.
3. Calculer $B \times \begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$. Déterminer tous les sous-espaces propres de B, et la diagonaliser.
4. Déterminer une matrice P vérifiant les conditions suivantes ;
   - $D_1 = P^{-1}AP$ est diagonale ;
   - $P^{-1}BP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$;
   - La première ligne de P vaut $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$
5. Pour les trois matrices suivantes, donner à chaque fois une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
   - $M = 2A - I_3$.

- $M = B^2$
- $M = A - B$.

Exercice 4.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Sans AUCUN calcul, montrer que A est diagonalisable.
2. **Sans effectuer un pivot**, montrer que -1 est une valeur propre de A, et donner la dimension de $E_{-1}(A)$. (NB : on ne demande pas de déterminer $E_{-1}(A)$, seulement de trouver sa dimension).
3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire le spectre de A. Montrer que A est inversible.
4. Déterminer des matrices $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et Δ diagonale telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 5 (Mises à la puissance n et application)**.**

1. On reprend les matrices de l'exercice 3. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la matrice $(A - B)^n$.
2. On considère les trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ définies par : $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n - c_n) \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n - 2b_n + 4c_n) \end{cases}$$

   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire les expressions explicites de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (c) On considère les mêmes suites, mais vérifiant cette fois les conditions initiales $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ où a, b, c sont des réels.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ces trois suites tendent vers 0 pour $n \to +\infty$.

Exercice 6 (Mises à la puissance n et application)**.**
On considère une suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 1, u_1 = u_2 = 0$, et obéissant à la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$$

On introduit la colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Donner une matrice M telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = MV_n$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que si λ est racine du polynôme $X^3 - 4X^2 + X + 6$, alors λ est valeur propre de M.

3. En remarquant que -1 est racine de ce polynôme, trouver toutes les valeurs propres de M. Déterminer P et D telles que $M = PDP^{-1}$ (on prendra la première ligne de P composée uniquement de « 1 » , et les coefficients diagonaux de D classés par ordre croissant).

4. Montrer que la suite U_n définie par : $V_n = P^{-1}U_n$ vérifie $V_n = D^n V_0$.

5. On note $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Déterminer V_n pour tout entier n, puis u_n pour tout entier n.

Exercice 7 (Une matrice non diagonalisable)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Calcul de puissances de A par trigonalisation

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire le spectre de A.

2. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

3. Déterminer l'unique sous-espace propre de A.

4. Soit f canoniquement associé à A. Calculer $f\big((1,1,1)\big)$. Donner la matrice de f dans la base $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\big)$. On note T cette matrice.

5. Montrer que $A = PTP^{-1}$, où P est une matrice à préciser. Calculer P^{-1}.
(NB : on dit qu'on a trigonalisé M).

6. Soit N telle que $T = 2I_3 + N$. Calculer N^2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer T^n en fonction de n.

7. En déduire A^n en fonction de n.

Une autre méthode de calcul de A^n par un polynôme annulateur

8. En reprenant le résultat de la question 1, montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n I + b_n A$.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

9. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur (b_n) ; en déduire l'expression de b_n pour tout entier n, puis celle de a_n.

10. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, I_3 et A.

Exercice 8 (ECRICOME 2025)**.**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On note 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3}.

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit M une matrice de E_A. Montrer que ${}^tM$ appartient à E_A.

4. (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.
   (c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$.

Dans toute la suite de l'exercice, D **et** P **désignent les matrices introduites à la question 4.(c).**

5. Calculer P^2. En déduire une expression de P^{-1}.

6. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que N appartient à E_D si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D.

7. (a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
   Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D.

   (b) En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathscr{B}$.

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A+M)^2 = A^2 + M^2$.
   On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M.

9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$.
   En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ.

Exercice 9. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ in $S_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 10 (Adapté d'EDHEC 2023)**.** Soit $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que L est diagonalisable ? *On note* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ *les valeurs propres non nécessairement distinctes de* L *et on suppose* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

2. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la question ${}^tXLX$?

   (b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a:
   $$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$

   (c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
   Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

   (d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Vect}(U)$.

   (b) Conclure que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Exercice 11 (Oral HEC E)**.**

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors A^3 l'est aussi.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 12. On définit :

Définition 1. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle* hyperplan de E *tout sous-espace vectoriel de E de dimension* $\dim(E) - 1$.

On va ici démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles. Supposons, par l'absurde, l'existence d'un hyperplan $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices non inversibles.

1. Exprimer $p = \dim(H)$ en fonction de n.
2. Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de H. Montrer que $(A_1, \ldots, A_p, I_n)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit N une matrice nilpotente (*ie* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que N^k est la matrice nulle).
   Montrer qu'il existe $A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = A + \lambda I_n$.
4. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$; en déduire que $\lambda = 0$ et que $N \in H$.

On a alors montré que toute matrice nilpotente est dans H. Nous allons maintenant construire une matrice inversible dans H, ce qui fera apparaître une contradiction.

5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, et que leur somme est inversible. Conclure à la contradiction recherchée.
6. Essayer de généraliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour n entier quelconque.

Réduction en Python

On rappelle / introduit les outils d'algèbre linéaire de Python.
Le package pertinent est `numpy.linalg`, qui s'importe usuellement par

```
import numpy.linalg as al
```

La commande de réduction est `al.eig` (`eig` pour eigenvalues / eigenvectors : respectivement valeurs propres et vecteurs propres en anglais).
On rentre une matrice comme d'habitude : après import de `numpy`, une matrice est le `np.array` dont les composantes sont ses lignes. Par exemple, $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sera codée par :

```
M1=np.array([[2,0,0,1],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[1,0,0,2]])
```

La commande :

```
al.eig(M1)
```

renvoie alors :

```
(array([3., 1., 1., 1.]),
 array([[ 0.70710678, -0.70710678,  0.        ,  0.        ],
        [ 0.        ,  0.        ,  1.        ,  0.        ],
        [ 0.        ,  0.        ,  0.        ,  1.        ],
        [ 0.70710678,  0.70710678,  0.        ,  0.        ]]))
```

Le premier `array` est la diagonale d'une matrice diagonale semblable à M_1 : ici on nous informe donc que M_1 est semblable à $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le second `array` donne la matrice de passage : ses colonnes sont donc des vecteurs propres. Si on reprend D_1 on voit que les 3 dernières colonnes de P forment une base de $E_1(M_1)$: $E_1(M_1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -0.707... \\ 0 \\ 0 \\ 0.707... \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
On voit que le premier vecteur peut avec profit être normalisé en divisant par 0.707... ; on a en fait

$$E_1(M_1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad et \quad E_3(M_1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

`al.eig` fournit donc ici la matrice de passage suivante :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.707... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.707... & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou, de manière équivalente :} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$.
Vous pouvez maintenant vérifier tous vos résultats de ce TD avec Python !!

Remarques :

- `al.solve` ne nous aidera pas à rechercher des sous-espaces propres : il ne fonctionne que sur des systèmes de Cramer, ce que ne sont pas, par définition, les systèmes menant à la détermination de sep.
- Le rang d'une matrice sert assez régulièrement à la détermination de sous-espaces propres. Ici on peut retrouver[1] que $\dim(E_3(M_1)) = 1$ avec la commande suivante :

  ```
  al.matrix_rank(M1-3*np.eye(4))
  ```

  qui renvoie le résultat : `3`.
  On rappelle que la commande `np.eye(n)` *renvoie la matrice* I_n.

[1] avec un peu de raisonnement !

Indications

1 Solutions possibles :

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}, D_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}, D_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}, D_3=\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}, D_4=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_5=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&6&-4\\0&0&8\end{pmatrix}, D_5=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$P_6=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&2\\-1&1&-3\end{pmatrix}, D_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

2 Permuter les lignes pour avoir des pivots indépendants de λ. À la dernière étape (mettre à 0 le coefficient $(3,2)$) on pourra faire $L_2 \leftarrow aL_2+bL_3$ pour mettre un coeff $(2,2)$ indép de λ·
On trouve $\mathrm{Sp}(M)=\{0,2,8\}$.

3

1. On trouve $A^2-7A=-12I_3$ ce qui fournit un polynôme annulateur de A !!
2.
3. Rappel : $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ au au max combien de vap ?? Et ne pas dire que $E_3=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sans justifier.
4. P doit donc contenir une base de colonnes qui sont À LA FOIS vep de A et de B !
5. La matrice P de la question 4 diagonalise A et B. Elle devrait pouvoir servir.

4

1.
2. Se ramener au critère principal vu en cours. Ensuite on applique toujours le même théorème quand on cherche dim(Ker) sans avoir ce Ker explicitement.
3. Bien compter les dimensions.
4.

5

1. $(PDP^{-1})^n=....$
2. (a) Il faut faire apparaître $\frac{1}{3}(A-B)$.
   (b) (U_n) « se comporte comme une suite géométrique » **(mais attention ce n'en est pas une, cette notion est réservée aux suites réelles. Si vous voulez utiliser des formules analogues il faut les démontrer)**.
   (c) Décomposer $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sur une base de vep de $(A-B)$.

6

1. $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-1&4\end{pmatrix}$.
2. Si $\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0$ on a un vecteur propre sous les yeux.
3. Penser aux dimensions... il n'y a aucun système à résoudre pour obtenir les SEP et diagonaliser.
4.
5. On remarque qu'on n'a pas besoin de P^{-1}... calculer pendant un certain temps avec α,β,γ dont on trouvera les valeurs à la fin à l'aide des conditions initiales.

7

1. $A^2-4A=-4I_3$.
2. Matrice à une seule vap... raisonnement à connaître.
3.
4. On trouve $T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$.
5. On trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

6.
7.
8.
9.
10.

8 1.
2.
3.
4. (a) Sans calcul.
   (b) Généralement ça tourne autour d'un polynôme annulateur.
   (c) On trouve $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $P^2 = 9I_3$ donc P^{-1} s'exprime simplement en fonction de P.
6. (a) Cette fois c'est brutal.
   (b)
7. (a) Multiplier $ND + DN = 0$ par P ou P^{-1}, à gauche ou à droite...
   Attention au "ssi" à justifier proprement !!
   (b) Si N se décompose sur une certaine base, on obtient que M se décompose sur une autre famille... mais est-ce une base ? Attention ne pas effectuer explicitement tous les produits matriciels ; il y a un moyen de déduire de la liberté d'une famille, celle de l'autre.
8. En général, que vaut $(A+M)^2$?
9. Parler de son Ker.

9 Compter les valeurs propres... il y a un cas particulier qui demande un tout petit plus de discussion.

10 1. Sans calcul.
2. (a)
   (b) Ne pas s'énerver... on trouve par calcul direct
$$^{t}XLX = 2a^2 - 2ab - 2ad + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2cd + 3d^2 - 2de + e^2$$
   Ensuite montrer que c'est bien la réponse attendue.
   (c) Si X est vep, LX a une expression très simple ! En égalant avec ce qui précède on trouve une expression très compliquée pour λ en fonction de a, b, c, d, e... mais on ne demande que son signe.
   (d)
3. (a) Malheureusement, pas d'argument subtil ici.
   (b) Réfléchir à $\dim(\mathrm{Ker}(L))$.

11 1. Si $A = PDP^{-1}$ que vaut A^3 ?
2. $\mathrm{Sp}(A) =$?

12 1.
2. Famille de cardinal $n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.
   On considère une combi lin $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_p A_p$. Si λ_0 non nul on peut exprimer I_n en fonction des A_i .... trouver là une contradiction.
3. Utiliser la base ci-dessus.
4. Montrer que $A = N - \lambda I_n \in H$. Or on connaît (et on sait redémontrer) le spectre d'une matrice nilpotente.
5. ...
6. Prendre « les mêmes » matrices, en taille n. La nilpotence n'est pas si facile à avoir... pour la tri.sup . on peut passer par l'endo canoniquement associé et regarder f^n des vecteurs de la base canonique.