Programme de colle n°8
Semaine du 1/12

Algèbre linéaire
Réduction des matrices carrées (début)

Pour cette semaine, les exercices étoilés du TD5 sont exigibles.

Reprise des programmes précédents

- Espaces vectoriels
- Applications linéaires.

Réduction des matrices carrées

Attention, en ECG2 Maths Appliquées on ne réduit que des matrices, et le chapitre est surtout à visée pratique. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité notamment.

Dans ce qui suit, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
  Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$,on définit le sous-espace propre associé :
  $$E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\right\}$$
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ ssi $M - \lambda I_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Conséquences : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a au plus n valeurs propres ; $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leqslant n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

Réduction en pratique (cas d'une matrice diagonalisable)

- On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension $\geqslant 3$.
- Pour savoir si un λ **donné** est vap, on examine l'inversibilité de $M - \lambda I_n$ ou on montre que $MX = \lambda X$ a des solutions non nulles.
- Recherche des sous-espaces propres par résolution de systèmes linéaires.
- Construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.

Nous n'avons pas encore vu les polynômes annulateurs et résultats associés, ce sera pour la semaine prochaine.