# DM 2
# Facultatif

## Exercice 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

1. Donner une base et la dimension de $\mathscr{F}$.
2. Calculer les produits $J^2, K^2, JK, KJ$. En déduire que $\mathscr{F}$ est *stable par produit*, c'est-à-dire : $\forall (M, M') \in \mathscr{F}^2$, $MM' \in \mathscr{F}$.
3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de $\mathscr{F}$. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.
   (a) Montrer que M est inversible ssi $a \neq 0$.
   (b) Pour $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$, calculer le produit $\big(I + bJ + cK\big)\big(I + xJ + yK\big)$. En déduire $M(1, b, c)^{-1}$.
4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice $M(1, 1, 1) = I + J + K$.
   (a) Exprimer $\big(I + J + K\big)^2$ et $\big(I + J + K\big)^3$ comme des combinaisons linéaires de I, J, K.
   (b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels $a_n, b_n, c_n$ tels que
   $$\big(I + J + K\big)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$
   Justifier que ces réels sont uniques.
   Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n, c_n$.
   (c) Déterminer la valeur de $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; puis de $b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
5. On rappelle que pour M inversible, on définit $M^{-n} = \big(M^{-1}\big)^n$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier $n > 0$, on a
   $$\big(I + J + K\big)^{-n} = I - nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$$

## Exercice 2

**Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.**
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant m) > 0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n + m) = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
On pose $\mathbb{P}(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1 - p$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X \geqslant n + m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)\mathbb{P}(X \geqslant n)$.
3. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique.
   (b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ en fonction de $n$ et de $q$.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n + 1)$.
   (d) En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X + 1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

**Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.**
Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant $n$, noté $\lambda_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \mathbb{P}_{(Y\geqslant n)}(Y = n)$.

5. (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}(Y = n)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)}$.

   (b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}(Y \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)}$.

   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \lambda_n < 1$.

   (d) Montrer par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.

6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant n) = 0$.

   (c) Montrer que $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty\right)$

   (d) En déduire la nature de la série de terme général $\lambda_n$.

7. On suppose ici que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de $\mathbb{P}(Y \leqslant n-1)$ sous forme d'une somme finie ; en déduire une expression de $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

   (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function p=Poisson(n,alpha)` qui calcule $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ pour $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$.
   *On admet $n!$ s'obtient en Python par* `np.math.factorial(n)`.

   (c) En déduire une fonction Python `Taux_Panne(n,alpha)` qui calcule le taux de panne de Y à l'instant $n$. On pourra utiliser la fonction programmée en question 7b.

**Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.**

8. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3d.

9. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \lambda$.

   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.

   (b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de $\lambda$ et $n$.

   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout $n$ de $\mathbb{N}, \mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.