

## Programme de colle n°11

### Semaine du 15/12

#### Réduction des matrices

#### Application aux chaînes de Markov

**Ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » pour la colle est la diagonalisation d'une matrice (diagonalisable !) :**

- **Recherche de valeurs propres par pivot ou utilisation d'un polynôme annulateur ;**
- **Détermination de bases des sous-espaces propres ;**
- **Construction de P et D telles que  $M = PDP^{-1}$ , en tenant compte d'éventuelles contraintes.**

#### Réduction des matrices carrées

Attention, en ECG2 Maths Appliquées on ne réduit que des matrices, et le chapitre est surtout à visée pratique. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité notamment.

Dans ce qui suit,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.  
Sous-espace propre :  $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\}$ .  
(NB : la notation est acceptée pour  $\lambda \notin \text{Sp}(M)$ , et on a alors la caractérisation :  $\lambda \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow E_\lambda(M) \neq \{0\}$ ).
- $\lambda \in \text{Sp}(M)$  ssi  $M - \lambda I_n$  est non inversible (cas particulier très fréquent avec  $\lambda = 0$ ).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.  
Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.  
Conséquence :  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leq n$ .
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que  $M = PDP^{-1}$ .
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M,  $\text{Sp}(M)$  est contenu dans l'ensemble des racines de P.
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

#### Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
  - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre  $\lambda$  en dimension  $\geq 3$ .
  - Utilisation d'un polynôme annulateur.
  - L'étude du rang de  $M - \lambda I_n$  et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.  
*NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.*
- Recherche des sous-espaces propres :
  - résolution de systèmes linéaires ;

- dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à  $\lambda$  et on démontre que  $E_\lambda$  est de dimension 1).
  - Si  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$ , construction de  $P$  et  $D$  telles que  $M = PDP^{-1}$ .
  - Si  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) < n$ , il n'est pas au programme de conclure que  $M$  n'est pas diagonalisable.
- Par contre on peut exiger le raisonnement par l'absurde qui montre que si  $\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$  et  $M \neq \lambda I_n$ , alors  $M$  n'est pas diagonalisable.

## Chaînes de Markov

- Rappels d'ECG1 sur les graphes : sommets, arêtes, graphes orientés, graphes pondérés.
- Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
- Graphe probabiliste : c'est un graphe
  - orienté et pondéré ;
  - pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ , on a au plus une arête  $i \rightarrow j$  ;
  - pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la somme des poids des arêtes sortant du sommet  $i$  est 1.

On notera  $r$  le nombre de sommets du graphe probabiliste considéré.

- Matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Définition : matrice stochastique. Une matrice est stochastique ssi c'est la matrice de transition d'un graphe probabiliste. Si  $M$  est stochastique,  $1 \in \text{Sp}(M)$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M)$ .
- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste de matrice de transition  $M$  : c'est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , à valeurs dans  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , telles que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = m_{i,j}$$

où  $m_{i,j}$  est le coefficient  $(i, j)$  de  $M$  (c'est donc le poids de l'arête  $i \rightarrow j$ ).

Interprétation : position au temps  $n$  d'un système sans mémoire « se déplaçant aléatoirement » sur le graphe en temps discret.

- On range la loi de  $X_n$  dans un vecteur de  $\mathcal{M}_{1,r}^r$  :

$$V_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_n = r))$$

On a alors la relation  $V_{n+1} = V_n M$ .  $V_n$  est appelé *n-ième état probabiliste de la chaîne*.

- $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 M^n$ .
- État probabiliste stable : c'est un état probabiliste  $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$  (les  $p_i$  sont donc positifs et de somme 1) tel que  $VM = V$ .

Un état  $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$  est stable ssi  $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  ${}^t M$  pour la valeur propre 1.

## Python

Simulation d'expériences aléatoires : pas de commandes spécifiques aux chaînes de Markov mais on peut demander de simuler des expériences aléatoires simples avec `rd.random`, `rd.randint` par exemple.