

Programme de colle n°11

Semaine du 15/12

Réduction des matrices

Application aux chaînes de Markov

Ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » pour la colle est la diagonalisation d'une matrice (diagonalisable !) :

- Recherche de valeurs propres par pivot ou utilisation d'un polynôme annulateur ;
- Détermination de bases des sous-espaces propres ;
- Construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$, en tenant compte d'éventuelles contraintes.

Réduction des matrices carrées

Attention, en ECG2 Maths Appliquées on ne réduit que des matrices, et le chapitre est surtout à visée pratique. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité notamment.

Dans ce qui suit, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
Sous-espace propre : $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\}$.
(NB : la notation est acceptée pour $\lambda \notin \text{Sp}(M)$, et on a alors la caractérisation : $\lambda \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow E_\lambda(M) \neq \{0\}$).
- $\lambda \in \text{Sp}(M)$ ssi $M - \lambda I_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
Conséquence : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leq n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M , $\text{Sp}(M)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P .
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
 - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension ≥ 3 .
 - Utilisation d'un polynôme annulateur.
 - L'étude du rang de $M - \lambda I_n$ et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.
- Recherche des sous-espaces propres :
 - résolution de systèmes linéaires ;

- dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à λ et on démontre que E_λ est de dimension 1).
- Si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$, construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.
- Si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) < n$, il n'est pas au programme de conclure que M n'est pas diagonalisable.
Par contre on peut exiger le raisonnement par l'absurde qui montre que si $\text{Sp}(M) = \{\lambda\}$ et $M \neq \lambda I_n$, alors M n'est pas diagonalisable.

Chaînes de Markov

- Rappels d'ECG1 sur les graphes : sommets, arêtes, graphes orientés, graphes pondérés.
- Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
- Graphe probabiliste : c'est un graphe
 - orienté et pondéré ;
 - pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, on a au plus une arête $i \rightarrow j$;
 - pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la somme des poids des arêtes sortant du sommet i est 1.

On notera r le nombre de sommets du graphe probabiliste considéré.

- Matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Définition : matrice stochastique. Une matrice est stochastique ssi c'est la matrice de transition d'un graphe probabiliste. Si M est stochastique, $1 \in \text{Sp}(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M)$.
- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste de matrice de transition M : c'est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, telles que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le coefficient (i, j) de M (c'est donc le poids de l'arête $i \rightarrow j$).

Interprétation : position au temps n d'un système sans mémoire « se déplaçant aléatoirement » sur le graphe en temps discret.

- On range la loi de X_n dans un vecteur de $\mathcal{M}_{1,r}^r$:

$$V_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_n = r))$$

On a alors la relation $V_{n+1} = V_n M$. V_n est appelé *n-ième état probabiliste de la chaîne*.

- $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 M^n$.
- État probabiliste stable : c'est un état probabiliste $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$ (les p_i sont donc positifs et de somme 1) tel que $VM = V$.

Un état $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$ est stable ssi $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t M$ pour la valeur propre 1.

Python

Simulation d'expériences aléatoires : pas de commandes spécifiques aux chaînes de Markov mais on peut demander de simuler des expériences aléatoires simples avec `rd.random`, `rd.randint` par exemple.