

## TD Réduct°.

Correct° Exo7 (fin)

On rappelle que  $A^2 - 4A = -4I_3$

Montrons alors par récurrence la propriété  $P(n)$ : " $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  tels que  
 $A^n = a_n I + b_n A$ "

\* Pour  $n=0$ ,  $A^0 = I = 1 \times I + 0 \times A$ .  $P(0)$  est vérifiée avec  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$

\* Si  $A^n = a_n I + b_n A$ , alors  $A^{n+1} = a_n A + b_n A^2$   
 $= a_n A + b_n (4A - 4I)$   
 $= -4b_n I + (a_n + 4b_n) A.$

Si on pose  $\boxed{\begin{matrix} a_{n+1} = -4b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{matrix}}$  on a bien l'expression requise:  
d'où  $P(n+1)$ .

Les propriétés encadrées relient  $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$b_{n+2} = a_{n+1} + 4b_{n+1} = -4b_n + 4b_{n+1} \Rightarrow \underline{b_{n+2} - 4b_{n+1} + 4b_n = 0}$$

On obtient une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; d'éq. caract.  $x^2 - 4x + 4 = 0$   
qui a pour unique solut°  $\lambda = 2$

$$\Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = (\alpha n + \beta) 2^n.$$

Avec  $b_0 = 0$  et  $b_1 = 1$  (car  $A^1 = 0 \times I + 1 \times A$ ) on trouve  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$   
 $\Rightarrow \underline{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n 2^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Puis } a_n &= b_{n+1} - 4b_n \\
 &= (n+1)2^n - 4n2^{n-1} \\
 &= 2^n(n+1-2n)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n(1-n)}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A}$$