Systèmes différentiels linéaires
Définitions et théorèmes

1 Introduction aux équations différentielles

Les équations différentielles (ED) sont des problèmes issus de l'application des mathématiques à divers champs d'étude, notamment la physique, la biologie ou l'économie. Il s'agit de trouver des fonctions f qui vérifient une équation reliant les valeurs de f aux valeurs de ses dérivées successives : f', f'', ...
On peut imaginer pourquoi de telles contraintes apparaissent :

- le modèle le plus naïf de dynamique des populations est celui où la variation (dérivée) d'une population est donnée par les naissances et décès, qu'on suppose proportionnels à cette population ;
- pour des raisons similaires, les variations du PIB d'un pays peuvent, en première approximation, être supposées proportionnelles à ce PIB ;
- en physique, l'accélération (dérivée seconde de la position) d'un corps céleste est une fonction de la force de gravitation (qui dépend de la position dudit corps céleste relativement à ce qui l'attire) ;
- en biologie, notons $\ell(t)$ la population de lapins au temps t et $r(t)$ la population de renards au temps t d'un certain écosystème.
  Les renards mangeant les lapins, il y aura un terme en $-\beta\,\ell(t)r(t)$ dans la variation de la population de lapins ; et un terme en $\delta\,\ell(t)r(t)$ dans la variation de la population de renards.
  Avec d'autres modélisations « naturelles » on est en fait ramenés à considérer que ℓ et r vérifient :
  $$\begin{cases} \ell'(t) = \alpha\,\ell(t) - \beta\,\ell(t)r(t) \\ r'(t) = -\gamma\, r(t) + \delta\,\ell(t)r(t) \end{cases}$$
  (« modèle proie-prédateur » de Lotka-Volterra).
  Ce dernier exemple met en jeu plusieurs fonctions et leurs dérivées : on parle alors de *système différentiel* (SD).

2 La notation avec « y »

Une ED (linéaire d'ordre n par exemple) se présente traditionnellement avec la notation suivante :

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)y = b(t)$$

(par exemple $y'' + 2t\,y = t^2 + 1$).
Cette notation peut paraître abusive mais c'est l'usage. Ici y représente la fonction inconnue ; et on considère une fonction de la variable t.

Ainsi, par exemple :

La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2t\,y = t^2 + 1$ ssi :   elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $\quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2t\,f(t) = t^2 + 1$

et de même sur des exemples plus compliqués.

On peut donc retenir qu'il faut « remplacer y par $f(t)$ » pour voir si une fonction f est solution d'une ED / traduire le fait qu'elle l'est.

3 Rappels de première année : équations différentielles linéaires

Théorème 1. *Soit* (E) *l'équation* $y' + ay = b(t)$ *et* (E_0) : $y' + ay = 0$ *l'équation homogène associée.*

1. *Les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto Ke^{-at}$, *où* K *est un réel quelconque.*

2. *Si* y_0 *est une solution de* (E) *(appelée dans ce contexte* solution particulière*) alors les solutions de* (E) *sont les fonctions de la forme* $y + y_0$, *où* y *est solution de* (E_0).

Proposition 2 (Quelques pistes de recherche de solution particulière)**.**
Dans le cas d'une équation homogène $y' + ay = b(t)$ *:*

- *si b est une constante, on peut rechercher une solution particulière constante ;*
- *si b est une fonction polynomiale, on peut rechercher une solution polynomiale de même degré ;*
- *si* $b(t) = Ke^{\alpha t}$ *(avec* $\alpha \neq -a$*) on peut rechercher une solution sous la forme* $K'e^{\alpha t}$
- *si* $b(t) = Ke^{-at}$ *on peut rechercher une solution sous la forme* $K'te^{-at}$

Théorème 3. *Soit* (E) *l'équation* $y'' + ay' + by = c(t)$ *et* (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ *l'équation homogène associée (*(a, b) *sont ici des constantes réelles et c une fonction continue).*

On appelle équation caractéristique *de* (E) *l'équation* $r^2 + ar + b = 0$ *; on* suppose *que cette équation admet des solutions réelles.*

1. *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles* r_1 *et* r_2, *alors les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$, *où* (K_1, K_2) *sont deux réels quelconques.*

2. *Si l'équation caractéristique admet une seule solution réelle* r, *alors les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto (K_1t + K_2)e^{rt}$, *où* (K_1, K_2) *sont deux réels quelconques.*

3. *Si* y_0 *est une solution particulière de* (E), *alors les solutions de* (E) *sont les fonctions de la forme* $y + y_0$, *où* y *est solution de* (E_0).

Proposition 4 (Quelques pistes de recherche de solution particulière)**.**
Dans le cas d'une équation homogène $y'' + ay' + by = c(t)$ *:*

- *si c est une constante, on peut rechercher une solution particulière constante ;*
- *si c est une fonction polynomiale, on peut rechercher une solution polynomiale de même degré ;*
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut rechercher une solution sous la forme* $K'e^{\alpha t}$
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *est* ***une des deux solutions*** *de l'équation caractéristique (cas* $\Delta > 0$*), on peut rechercher une solution sous la forme* $K'te^{\alpha t}$
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *est* ***l'unique solution*** *de l'équation caractéristique (cas* $\Delta = 0$*), on peut rechercher une solution sous la forme* $K't^2e^{\alpha t}$

4 Systèmes différentiels linéaires

Définition 1. *On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants tout système se mettant sous la forme*

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \cdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

Ici les x_i sont les fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I ; et les $a_{i,j}$ sont des réels (constants).

En posant $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ on réécrit ce système sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de coefficients $a_{i,j}$.

Définition 2. *On appelle* **problème de Cauchy** *la donnée d'un système différentiel et d'une* condition initiale.

Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, t_0 *est un réel, et* $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *on appelle problème de Cauchy la recherche des X vérifiant* $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$.

Concrètement, les x_i sont des grandeurs qui évoluent au cours du temps en suivant le système différentiel. Un problème de Cauchy consiste donc, connaissant l'état à un instant donné t_0 et les équations d'évolution, à obtenir l'expression des grandeurs à un temps t quelconque.
Un théorème puissant confirme ce qu'on souhaiterait : ces informations suffisent à déterminer les grandeurs à tout temps t. De plus ceci a lieu sans restriction sur le choix de l'état initial, ni sur l'instant auquel cet état est associé.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy)**.**
Quels que soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *il existe une unique solution au problème de Cauchy* $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$ *, définie sur* $\mathbb{R}$ *entier.*

Au-delà de cette signification empirique, nous verrons des applications de ce théorème.

4.1 Résolution d'un système dans le cas A diagonalisable

On détermine le spectre de A et ses sous-espaces propres : ceci permet la détermination explicite des solutions.

Théorème 6. *Soit le système différentiel* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, *où* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable.*
Si $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ *est une base de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de vecteurs propres de M, avec* U_i *associé à la valeur propre* λ_i*, alors les solutions de ce système sont les fonctions :* $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}_i e^{\lambda_i t} \mathrm{U}_i$, *où* $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n$ *sont des réels quelconques.*

La connaissance d'une condition initiale $X(t_0) = X_0$ permet alors de déterminer les valeurs des K_i (le théorème de Cauchy assure leur existence et unicité).

On dispose d'une autre méthode de résolution, qui consiste à changer de base pour obtenir un système plus simple. Il faut la retenir car elle peut se généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable.

Théorème 7 (Une autre méthode de résolution)**.** *Soit le système différentiel* $X' = AX$*, où* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable.*
Soient P inversible et D diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *telles que* $A = PDP^{-1}$*, et* $Y = P^{-1}X$*.*
Alors Y est solution de $Y' = DY$ *; de sorte que*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ où } K_1, \dots, K_n \text{ sont des réels quelconques}$$

On a ensuite $X(t) = PY(t)$.

4.2 Équivalence équation d'ordre 2 / système d'ordre 1

On peut se demander comment procéder si les équations différentielles font apparaître des dérivées d'ordre supérieur à 1.
On peut en fait toujours se ramener à un système d'ordre 1. Nous présentons ici un cas simple, mais qui peut se généraliser et aboutit au fait que tout système linaire d'ordre n est équivalent, *via* un changement de fonction inconnue, à un système linéaire d'ordre 1.

Théorème 8. *Soit* $(E) : y'' + ay' + by + 0$ *et* $(S) : \begin{cases} x' = -ax - by \\ y' = x \end{cases}$.
y est une solution de (E) *ssi* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est une solution de* (S). *Autrement dit, les solutions de* (E) *sont les « secondes composantes » des solutions de* (S).

5 Aspects qualitatifs

Définition 3.
On appelle :

- ***trajectoire d'un système différentiel*** $X' = AX$ *tout ensemble de la forme* $\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *où* X *est une solution du système.*

  Notamment, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *et une trajectoire est un ensemble de points de plan.*

- ***point d'équilibre*** *du système toute solution* $X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *constante (trajectoires réduites à un point).*

- ***trajectoire convergente*** *toute solution* $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *où :* $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i \in \mathbb{R}$.

Proposition 9.

- *Les points d'équilibre du système* $X' = AX$ *sont les vecteurs de* $\operatorname{Ker}(A)$.
- *Corollaire : si A est inversible, le seul point d'équilibre est* $(0, 0, \dots, 0)$.
- *Si une trajectoire est convergente, sa limite est un point d'équilibre.*
- *Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, toute trajectoire est convergente, et la limite est un point d'équilibre.*
- *Corollaire des précédentes : si toutes les vap de A sont strictement négatives, alors toute trajectoire converge vers* $(0, 0, \dots, 0)$.
- *Si A admet au moins une valeur propre strictement positive, il existe des trajectoires divergentes.*