Concours Blanc n°1
Maths 2 : ESSEC2, 2016
Corrigé

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, E(X) l'espérance de X et V(X) sa variance.
Les deuxième et troisième parties sont indépendantes, et peuvent en outre être traitées en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) **Montrer que pour tout entier naturel j non nul, $\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j)$**

   X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc on a l'union disjointe :

$$(X > j-1) = (X = j) \cup (X > j)$$

   En passant aux probabilités :

$$\mathbb{P}(X > j-1) = \mathbb{P}(X = j) + \mathbb{P}(X > j)$$

   ce qui donne la réponse attendue.

   (b) **Soit p un entier naturel non nul. Montrer que**

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) - p\,\mathbb{P}(X > p)$$

   On part de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(X = j) &= \sum_{j=1}^{n} j\big(\mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(X > j-1) - \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(X > j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\,\mathbb{P}(X > j) - \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(X > j) \qquad \text{(chgt d'indice } j-1 \to j) \\
&= \mathbb{P}(X > 0) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} (j+1)\,\mathbb{P}(X > j) - \sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}(X > j)\right) - p\,\mathbb{P}(X > p) \\
&= \mathbb{P}(X > 0) + \sum_{j=1}^{n-1} (j+1-j)\,\mathbb{P}(X > j) - p\,\mathbb{P}(X > p) \\
&= \mathbb{P}(X > 0) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(X > j) - p\,\mathbb{P}(X > p) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > j) - p\,\mathbb{P}(X > p)
\end{aligned}$$

2. (a) **On suppose que** X **admet une espérance** $\mathbf{E}(X) = \mu$**.**

i. **Justifier la convergence de la série de terme général** $k\mathbb{P}(X = k)$**.**

L'existence de $\mathbf{E}(X)$ équivaut à la convergence absolue de la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$; on en déduit sa convergence.

ii. **Montrer que**

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0$$

$R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ est le reste partiel de $\sum k\mathbb{P}(X = k)$; cette série converge donc son reste partiel tend vers 0.

NB : cette rédaction suffit aux concours ; mais si on veut plus de détails : en notant S_p *les sommes partielles de* $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ *et S sa somme, on a* $R_p = S - S_p$ *et* $S_p \to S$ *(par définition de la convergence) donne* $R_p \to 0$.

iii. **En déduire que**

$$\lim_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X > p) = 0$$

On effectue une majoration. $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0$ donc pour $k \geqslant p$ on a $k\mathbb{P}(X = k) \leqslant p\mathbb{P}(X = k)$.
En sommant (les séries en jeu convergent) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) &\geqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\mathbb{P}(X = k)\\ &\geqslant p\sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\\ &\geqslant p\mathbb{P}(X > p)\end{aligned}$$

Or d'après 2(a)ii, $\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \to 0$. Comme $p\mathbb{P}(X > p) \geqslant 0$, un théorèmes des gendarmes donne $\lim\limits_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X > p) = 0$.

iv. **Montrer que la série de terme général** $\mathbb{P}(X > j)$ **converge.**
On repart du résultat de 1b , qui s'écrit aussi :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) = \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) + p\mathbb{P}(X > p)$$

- $\sum\limits_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) \to \mathbf{E}(X)$ dont on a supposé l'existence ;
- $p\mathbb{P}(X > p) \to 0$ d'après la question précédente.

On en déduit que $\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, ce qui donne la convergence de la série.

v. **Montrer que**

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$$

En passant à la limite $p \to +\infty$ dans $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) = \sum\limits_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) + p\mathbb{P}(X > p)$, on trouve

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(X = j) + 0 = \mathbf{E}(X) = \mu$$

(b) **On suppose que** $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$ **converge.**

i. **Déterminer le sens de variation de la suite $\left(v_p\right)_{p\geqslant 1}$ définie par**

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_{p+1} - v_p = \mathbb{P}(\mathrm{X} > p) \geqslant 0$: (v_p) est croissante.

ii. **Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$.**

Avec 1b :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j) - \underbrace{p\,\mathbb{P}(\mathrm{X} > p)}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$$

car $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$ existe et on somme des termes positifs.

iii. **En déduire que X admet une espérance.**

On a montré : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$.
Cette borne supérieure est indépendante de p, donc les sommes partielles de $\sum j\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = j)$ sont majorées : cette série converge (même absolument, car on somme des termes positifs). On en déduit bien que X admet une espérance.

(c) **Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$ converge.**

De 2a on tire que si $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ existe, alors la série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X} > j)$ converge ; et 2b donne la réciproque. On a bien l'équivalence demandée.

3. **On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait**

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \tag{*}$$

(a) **Légitimer que $(^*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.**

À une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ peut être associée une v.a. X telle que $a_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ ssi les a_k sont positifs, et si $\sum a_k$ est convergente, de somme 1.
Si $\mathbb{P}(\mathrm{X} > j) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha}$ alors $\mathbb{P}(\mathrm{X} = j) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > j-1) - \mathbb{P}(\mathrm{X} > j) = \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha}$.
Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \geqslant 0$; et un téléscopage donne

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^\alpha} \xrightarrow{\mathrm{N}\to+\infty} 1$$

ce qui donne bien la seconde propriété demandée.

(b) **Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.**

D'après 2c, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} > j) = \sum \frac{1}{(j+1)^\alpha}$ converge. C'est une série de Riemann , qui converge ssi $\alpha > 1$ d'après le cours.
(on peut éventuellement prendre l'équivalent $\frac{1}{j^\alpha}$ pour $j \to +\infty$ et conclure par comparaison de SATP, mais dans un cas aussi simple ça ne me semble pas indispensable)

(c) **Montrer que pour tout entier naturel j non nul**

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right).$$

On reprend le calcul précédent :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{j+1}{j}\right)^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right)$$

(d) i. **Étudier les variations de $f : x \mapsto 1-(1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.**

Sur $[0,1]$, $1+x$ ne s'annule pas donc f est bien définie et $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle.
On trouve :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} - \alpha = \alpha\left(\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}\right) \leqslant 0 \text{ dès que } x \geqslant 0$$

donc f est décroissante sur $[0,1]$.

ii. **Montrer que pour tout entier naturel j non nul,**

$$\mathbb{P}(X = j) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

En $\frac{1}{j} \in [0,1]$, on obtient par décroissance $f\left(\frac{1}{j}\right) \leqslant f(0)$, et donc

$$1 - \frac{1}{(1+1/j)} - \frac{\alpha}{j} \leqslant 0$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha} &\leqslant \frac{\alpha}{j} \\ \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right) &\leqslant \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \\ \mathbb{P}(X = j) &\leqslant \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

(e) **Montrer, en utilisant le résultat de (c), que**

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X = j) = \alpha$$

Pour $j \to +\infty$, $\dfrac{1}{j} \to 0$ et donc avec l'équivalent usuel $(1+u_n)^\alpha - 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) \\ &\underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{1}{j^\alpha}\left(\alpha \times \frac{1}{j}\right) \\ \mathbb{P}(X = j) &\underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

d'où on tire immédiatement $\lim\limits_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X = j) = \alpha$.

(f) **Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.**

L'équivalent précédent fournit

$$j^2\,\mathbb{P}(X = j) \underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$$

X admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2 ; donc, par théorème de transfert, ssi la série $\sum j^2 \mathbb{P}(X=j)$ converge (abs. mais elle est positive). Par comparaison de SATP cela équivaut à la convergence de $\sum \frac{1}{j^{\alpha-1}}$ qui a lieu ssi $\alpha - 1 > 1$ (Riemann).
Ainsi, X admet une variance ssi $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + \cdots + X_k$. T_k représente donc le jour où le k-ième composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n = « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n = « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ » , et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. **Montrer que A_n est réalisé si et seulement s'il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k = n$, et justifier qu'on a alors $k \leqslant n$.**

   Comme les X_i sont à valeurs strictement positives, il ne peut pas y avoir deux entiers $k_1 \neq k_2$ tels que $T_{k_1} = T_{k_2} = n$. En effet, en supposant par exemple $k_2 > k_1$ on aurait alors $T_{k_2} - T_{k_1} = X_{k_1+1} + \ldots + X_{k_2} = 0$ ce qui est impossible.
   Ainsi, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T_k = n$, celui-ci est unique.

   De plus comme $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $T_k \geqslant k$ (les X_i valent au moins 1). Si $T_k = n$ on a donc $k \leqslant n$.

5. **Informatique.**
   On suppose importés les packages `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` sous leurs alias usuels. On rappelle que, si `L` est une liste (ou tableau) de nombres, la commande `np.cumsum(L)` renvoie le tableau des sommes cumulées de `L`.

   (a) **On suppose codée une fonction `simul_X(n)` qui renvoie un tirage aléatoire $[X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)]$ où les X_i sont telles que décrites ci-dessus.**
   Programmer une fonction `simul_T(n)` qui renvoie un tirage de $[T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots, T_n(\omega)]$.

   Comme pour tout k, $T_k = X_1 + \cdots + X_k$, $[T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots, T_n(\omega)]$ est précisément la liste des sommes cumulées de $[X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)]$.
   On écrit simplement :

```python
def simul_T(n):
    X = simul_X(n)
    return np.cumsum(X)
```

   (b) **En déduire une fonction `A(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, simule certaines variables X_i, et renvoie `True` si A_n est réalisé et `False` sinon.**
   On justifiera précisément son programme, en s'aidant notamment de la question 4.

   Il s'agit donc de savoir si un des T_k vaut n. On a vu que si tel était le cas, on a $k \geqslant n$: il suffit donc de calculer les valeurs de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ et de chercher si n est parmi ces valeurs.

```python
def A(n):
    T = simul_T(n)
    if n in T:
        return True
    return False
```

6. **Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}\left(X_1 = j\right)$ et $u_j = \mathbb{P}\left(A_j\right)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.**

(a) **Montrer que $u_1 = p_1$.**

$u_1 = \mathbb{P}(A_1)$ est la probabilité qu'un des T_k vaille 1. Comme $T_k \geqslant k$, A_1 est réalisé ssi $T_1 = 1$:

$$A_1 = (T_1 = 1) = (X_1 = 1)$$

donc $u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p_1$.

(b) i. **Montrer que $A_2 = [X_1 = 2] \cup \big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$.**

C'est assez similaire : A_2 est réalisé ssi $T_1 = 2$ ou $T_2 = 2$.
$(T_1 = 2) = (X_1 = 2)$; et $(T_2 = 2) = (X_1 + X_2 = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
On en déduit :

$$A_2 = [X_1 = 2] \cup \big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

ii. **En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.**

L'union ci-dessus étant clairement disjointe, et X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(X_1 = 2) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 2) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) \\ u_2 &= p_2 + (p_1)^2\end{aligned}$$

(c) **Pour tout entier naturel i, on pose $\widetilde{X}_i = X_{i+1}$.**

i. **Montrer que les variables $\widetilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.**

$\big(\widetilde{X}_i\big)_{i\geqslant 1} = \big(X_i\big)_{i\geqslant 2}$ sont bien mutuellement indépendantes, indép de X_1 et de même loi que X_1 d'après l'énoncé.... pas grand-chose de mieux à dire ici il me semble.

ii. **Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que**

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 1} \big[\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + \cdots + \widetilde{X}_j = n - k\big]$$

On rappelle que A_n est l'événement : il existe j entier naturel non nul tel que $X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n$; donc

$$A_n = \bigcup_{j\geqslant 1} (X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n)$$

Dès lors

$$\begin{aligned}A_n \cap (X_1 = k) &= \bigcup_{j\geqslant 1} (X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n) \cap (X_1 = k) \\ &= \bigcup_{j\geqslant 2} (X_2 + \ldots + X_j = n - k) \cap (X_1 = k) \quad (n > k \text{ donc } (X_1 = k) \cap (X_1 = n) = \varnothing) \\ &= (X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geqslant 2} (X_2 + \ldots + X_j = n - k) \\ &= (X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geqslant 2} (\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + \cdots + \widetilde{X}_{j-1} = n - k) \\ &= (X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geqslant 1} (\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + \cdots + \widetilde{X}_j = n - k) \quad \text{avec } j \to j - 1\end{aligned}$$

iii. **En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n,**

$$\mathbb{P}_{[X_1 = k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

On écrit d'abord $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \dfrac{\mathbb{P}(A_n \cap [X_1 = k])}{\mathbb{P}(X_1 = k)}$ puis on reprend la formule précédente. Comme les variables $\widetilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes et indépendantes de X_1, X_1 et $\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + \cdots + \widetilde{X}_j$ sont indépendantes par lemme des coalitions.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = k]) &= \mathbb{P}\big((\mathrm{X}_1 = k) \cap \bigcup_{j\geqslant 1} (\widetilde{\mathrm{X}}_1 + \widetilde{\mathrm{X}}_2 + \cdots + \widetilde{\mathrm{X}}_j = n-k)\big) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \times \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geqslant 1} (\widetilde{\mathrm{X}}_1 + \widetilde{\mathrm{X}}_2 + \cdots + \widetilde{\mathrm{X}}_j = n-k)\right) \quad \text{avec l'indépendance suscitée} \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \times \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geqslant 1} (\widetilde{\mathrm{X}}_1 + \widetilde{\mathrm{X}}_2 + \cdots + \widetilde{\mathrm{X}}_j = n-k)\right)
\end{aligned}$$

Or les $\widetilde{\mathrm{X}}_i$ sont mutuellement indépendantes et suivant la même loi que les X_i ; donc les événements

$$\bigcup_{j\geqslant 1} (\widetilde{\mathrm{X}}_1 + \widetilde{\mathrm{X}}_2 + \cdots + \widetilde{\mathrm{X}}_j = n-k) \text{ et } \bigcup_{j\geqslant 1} (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_j = n-k)$$

sont de même probabilité, égale à $\mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k})$.
Finalement on a donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = k]) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \times \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k})$$

ce qui permet de conclure.

(d) **Montrer que**

$$u_n = u_{n-1} p_1 + \cdots + u_0 p_n$$

Il s'agit donc de discuter sur la valeur prise par X_1. Écrivons une formule des probas totales sur le SCE $((\mathrm{X}_1 = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = k]) \times \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k)$$

Si $k > n$, $\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = k]$ est vide car on ne peut pas avoir l'existence d'un i tel que $\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_i = n$ et $\mathrm{X}_1 > n$.
Si $k = n$, $\mathrm{A}_n \cap (\mathrm{X}_1 = n) = (\mathrm{X}_1 = n)$ car si $(\mathrm{X}_1 = n)$ alors A_n est réalisé ; donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = n]) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = n) = p_n = u_0 p_n$ car on a posé $u_0 = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[\mathrm{X}_1 = k]}(\mathrm{A}_n \cap [\mathrm{X}_1 = k]) \times \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\mathrm{A}_{n-k}) \times \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k)\right) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_n \cap (\mathrm{X}_1 = n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} u_{n-k}\, p_k + u_0 p_n \\
u_n &= \sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\, p_k
\end{aligned}$$

7. **Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ. Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1 = j\right) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.**

(a) **Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 > k)$ pour tout entier naturel k non nul.**

Vu plusieurs fois : on peut pour aller vite dire que si X_1 compte le rang du premier succès dans une succession d'expériences indépendantes de proba de succès λ, alors $(\mathrm{X}_1 > k)$ est réalisé ssi les k premières expériences sont des échecs ; par indépendance desdites expériences, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) = (1-\lambda)^k$$

(b) **Calculer $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}_1 > k]}(\mathrm{X}_1 = k+1)$.**

Un avatar de la propriété « sans mémoire » de la loi géo. Comme $(\mathrm{X}_1 > k) \cap (\mathrm{X}_1 = k+1) = (\mathrm{X}_1 = k+1)$ on peut écrire :

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{X}_1 > k]}(\mathrm{X}_1 = k+1) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 > k) \cap (\mathrm{X}_1 = k+1))}{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k)} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k+1)}{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k)} = \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{\lambda(1-\lambda)^{k-1}} = 1-\lambda$$

(c) **Montrer que pour tout entier naturel n non nul,**

$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

Avec $u_n = u_{n-1}p_1 + \cdots + u_0 p_n$ on peut procéder par récurrence forte.

- Pour $n = 1$, $u_1 = p_1$ (déjà vu) donc $u_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \lambda$.
- Si on a $u_k = \lambda$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ (et on rappelle que $u_0 = 1$) alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_{n+1-k}\, p_k &= u_0\, p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}\, p_k \\ &= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda(1-\lambda)^{k-1} \\ &= \lambda\left((1-\lambda)^n + \frac{1-(1-\lambda)^n}{\lambda}\right) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

  ce qui donne l'hérédité.

(d) **Programmer une fonction `simul_X(n)` qui renvoie un tirage de $[X_1, \ldots X_n]$ dans le cas $\lambda = \frac{1}{3}$.**

ici les X_i sont mutuellement indépendantes et suivant $\mathcal{G}(1/3)$. On propose donc

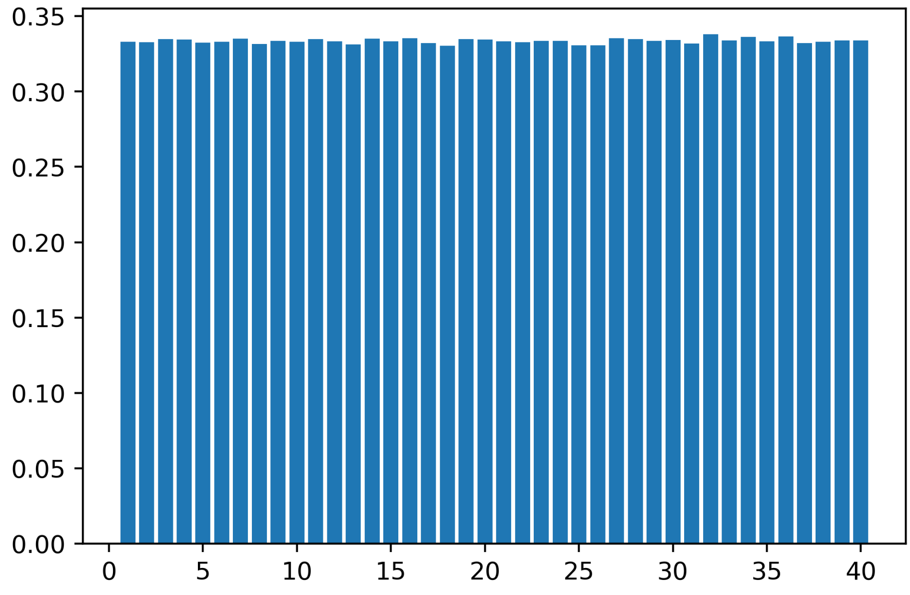
```
def simul_X(n):
    return rd.geometric(1/3,n)
```

(e) **On suppose que les fonctions de la question 5 sont programmées, et on entre les instructions suivantes :**

```
def fonc(n):
    c=0
    for k in range(100000):
        if A(n):
            c+=1
    return(c/100000)

N=list(range(1,41))
plt.bar(N,[fonc(n) for n in N])
plt.show()
```

On obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer en quoi cela est cohérent avec certains résultats obtenus précédemment.

La fonction `fonc` mseure, pour un entier n donné, la fréquence de réalisation de l'événemene A_n sur 100000 expériences. Ceci donne une approximation de $\mathbb{P}(A_n)$.
Le tracé graphique donne alors $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n pour $n \in [\![1,40]\!]$.
On observe que $\mathbb{P}(A_n)$ ne semble pas dépendre de n, et vaut $\simeq 0.33$; ceci est cohérent avec $\mathbb{P}(A_n) = \lambda = \frac{1}{3}$ qu'on a démontré dans les questions précédentes.

8. **On suppose dans cette question que** p_1 **vérifie** $0 < p_1 < 1$ **et que** $p_2 = 1 - p_1$. **Pour simplifier, on posera** $p = p_1 = 1 - p_2$.

(a) **Que vaut** p_i **pour** i **supérieur ou égal à 3 ?**

Si $p_1 + p_2 = 1 = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$ alors $X(\Omega) = \{1,2\}$; et pour tout $i \geqslant 3$, $p_i = \mathbb{P}(X=i) = 0$.

(b) **Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout entier naturel n **supérieur ou égal à 2 ,**

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$

La formule de la question 6d donne : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} p_1 + u_{n-2} p_2 = p\, u_{n-1} + (1-p)\, u_{n-2}$; d'où

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\, u_{n-1} + (1-p)\, u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

(c) **Montrer**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue une récurrence:

- Pour $n = 1$,
$$\frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = M^0$$
- Pour l'hérédité on vérifie sans peine que
$$M \times \left(\frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
ce qui donne l'hérédité.

(d) i. **Exprimer** u_n **en fonction de** p **et de** n.

Par une récurrence à rédiger (rapidement, mais à rédiger quand même) on montre à partir de 8b que

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 2,\ \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} &= M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -(1-p)^2 \\ 1-p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p} \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}$.

ii. **Déterminer** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$0 < p < 1$ donc $|p-1| < 1$ donc $(p-1)^{n+1} \to 0$; il suit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2-p}$$

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ). On notera toujours $T_k = X_1 + \cdots + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathbb{P}(X_1 > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, que l'on note $\mu = \mathbf{E}(X_1)$.

9. **Que vaut $\mathbf{E}(T_k)$?**

   Les X_i sont de même loi donc de même espérance. Par linéarité de l'espérance

   $$\mathbf{E}(T_k) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu = k\mu$$

10. **On suppose, dans cette question, que α est strictement supérieur à 2. X_1 admet donc une variance σ^2.**

    (a) **Calculer $\mathbf{V}(T_k)$.**

    Les X_i étant mutuellement indépendantes et admettant des variances, leur somme en admet également une. Par indépendance, la variance de la somme est égale à la somme des variances et on a $\mathbf{V}(T_k) = k\mathbf{V}(X_i) = k\sigma^2$.

    (b) **Montrer que pour tout réel ε strictement positif,**]

    $$\mathbb{P}\left(\left|T_k - k\mu\right| \geqslant k\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

    Avec Bienaymé-Tchebychev (T_k admet une variance) :

    $$\mathbb{P}\left(\left|T_k - k\mu\right| \geqslant k\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|T_k - \mathbf{E}(T_k)| \geqslant k\varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(T_k)}{(k\varepsilon)^2} = \frac{k\sigma^2}{(k\varepsilon)^2} = \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

    (c) **Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a**

    $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right) = 1$$

    On s'intéresse ici au contraire de l'événement précédent (le précédent dénotant le fait que T_k s'éloigne de son espérance, et celui de cette question le fait qu'il en soit proche).
    On a

    $$\begin{aligned}\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[&\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{T_k}{k} - \mu < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow -k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \left|T_k - k\mu\right| < k\varepsilon\end{aligned}$$

    et donc en termes d'événements :

    $$\overline{\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right)} = \left(\left|T_k - k\mu\right| \geqslant k\varepsilon\right)$$

    Donc, avec 10b :

    $$1 \geqslant \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|T_k - k\mu\right| \geqslant k\varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

    (le « $1 \geqslant$ » car c'est une probabilité !).
    Par théorème des gendarmes, on en déduit

    $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon\right[\right) = 1$$

11. **On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.**
On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires Y_i et Z_i de la façon suivante

$$Y_i = \begin{cases} X_i \text{ si } X_i \leqslant m, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \qquad Z_i = \begin{cases} X_i \text{ si } X_i > m \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(a) **Montrer que $X_i = Y_i + Z_i$.**

Soit un $\omega \in \Omega$.

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$, $Y_i(\omega) = X_i(\omega)$ et $Z_i(\omega) = 0$;
- Si $X_i(\omega) > m$, $Y_i(\omega) = 0$ et $Z_i(\omega) = X_i(\omega)$.

Dans les deux cas on observe bien que $X_i(\omega) = Y_i(\omega) + Z_i(\omega)$.

(b) i. **En utilisant la question 3(d)ii, montrer que**

$$\mathbf{E}(Z_1) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

On rappelle que $\mathbb{P}\left(X_1 > j\right) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$; et que donc par 3(d)ii $\mathbb{P}(X = j) \leqslant \dfrac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$.

On commence par montrer l'existence de $\mathbf{E}(Z)$. $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$: d'après la définition de Z, on a $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ si $k \leqslant m$, et $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k)$ si $k > m$.
Dans tous les cas on a donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k\mathbb{P}(Z = k) \leqslant k\mathbb{P}(X = k)$. X admet une espérance, donc $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge, donc $\sum k\mathbb{P}(Z = k)$ converge aussi (absolument, les termes sont positifs). Ainsi Z admet une espérance.
On a de plus

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

Enfin, $k\mathbb{P}(X = k) \leqslant k\dfrac{\alpha}{k^{\alpha+1}} = \dfrac{\alpha}{k^\alpha}$ et par convergence des deux séries en jeu ($\alpha > 1$) on peut sommer l'inégalité ; ce qui donne

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{k^\alpha}$$

ii. **Soit $M \geqslant m + 1$. Montrer que**

$$\sum_{i=m+1}^{M} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \sum_{i=m+1}^{M} \left(\int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t \right) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

On mène une comparaison série-intégrale (quand on aura le formalisme des intégrales impropres ça ira un peu plus vite !). La fonction $t \mapsto \dfrac{\alpha}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour $i \geqslant m + 1$:

$$\forall\, t \in [\![i - 1, i]\!],\ \frac{\alpha}{t^\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

d'où en intégrant (des fonctions continues) :

$$\frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$$

puis en sommant pour $i \in [\![m + 1, M]\!]$ (et avec une relation de Chasles sur les intégrales):

$$\sum_{i=m+1}^{M} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \sum_{i=m+1}^{M} \left(\int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t \right) = \int_{m}^{M} \frac{\alpha}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$$

On calcule maintenant l'intégrale :

$$\int_{m}^{M} \frac{\alpha}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \alpha \int_{m}^{M} t^{-\alpha} \,\mathrm{d}t = \alpha \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right]_m^M = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(M^{1-\alpha} - m^{1-\alpha} \right) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{m^{\alpha-1}} - \frac{1}{M^{\alpha-1}} \right) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

avec $\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} > 0$ et $\dfrac{1}{M^{\alpha-1}} > 0$. (on fait en sorte de faire apparaître la quantité POSITIVE $\alpha - 1$ pour ne pas tomber dans des pièges avec les inégalités).

iii. **Montrer que**

$$\mathbf{E}(Z_1) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

On sait que $\mathbf{E}(Z) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{k^\alpha}$.
Or en passant par les sommes partielles de la série en question, la question précédente fournit $\sum_{k=m+1}^{M} \frac{\alpha}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}$; ce dernier majorant étant indépendant de M, et la somme infinie existant bien, on obtient pour $M \to +\infty$:

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

Et donc on conclut bien

$$\mathbf{E}(Z) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

iv. **En déduire que**

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbf{E}(Z_1) = 0$$

Z_1 est à valeurs positives donc $\mathbf{E}(Z_1) \geqslant 0$; avec ce qui précède on peut écrire :

$$0 \leqslant \mathbf{E}(Z) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

et la partie droite de cette encadrement tend vers 0 pour $m \to +\infty$ car $\alpha > 1$.
Par théorème des gendarmes on a bien le résultat demandé.

v. **Montrer que**

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbf{E}(Y_1) = \mu$$

Comme $X_1 = Y_1 + Z_1$ on a par linéarité de l'espérance ($Y_1 = X_1 - Z_1$ admet une espérance également) :

$$\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(X_1) - \mathbf{E}(Z_1) = \mu - \mathbf{E}(Z_1)$$

ce qui donne immédiatement $\mathbf{E}(Y_1) \to \mu$ avec la question précédente.

(c) **Montrer que**

$$(Y_1)^2 \leqslant mX_1$$

On admet l'existence de $\mathbf{V}(Y_1)$***, et qu'on peut déduire de l'inégalité précédente :***

$$\mathbf{V}(Y_1) \leqslant m\mu$$

(d) **Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,**

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

$\alpha > 1$ donc $\lim_{m\to+\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} = 0$; l'existence m_0 est assurée par définition « epsilonesque » de la limite.

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

(e) **On note, pour tout entier naturel k non nul**

$$U_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i \text{ et } V_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$$

Vérifier que

$$T_k = U_k + V_k$$

Points « gratuits » !

$$T_k) = \sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k} (Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{k} Y_i + \sum_{i=1}^{k} Z_i = U_k + V_k$$

(f) i. **Montrer que**

$$\mathbf{E}(V_k) \leqslant k \times \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

$V_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$ admet une espérance car les Z_i en admettent une.
Avec la linéarité de l'espérance, et 11d :

$$\mathbf{E}(V_k) = \sum_{i=1}^{k} Z_k \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{m^{\alpha - 1}} \right) = k \times \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

ii. **On rappelle l'inégalité de Markov :**
Si** X **est une v.a à valeurs positives, admettant une espérance, alors : $\forall\, t > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(X)}{t}$**.**
Montrer que

$$\mathbb{P}(V_k \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

NB : j'ai mis ce rappel car le programme donne l'inégalité de Markov comme « non exigible » ; néanmoins je vous encourage à la connaître !

Application assez littérale de Markov avec $X = V_k$ qui est bien à valeurs positives et admet une espérance ; et $t = k\varepsilon > 0$. On utilise aussi la majoration de 11(f)i.

$$\mathbb{P}(V_k \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}(V_k)}{k\varepsilon} \leqslant \frac{k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}}{k\varepsilon} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

(g) i. **Montrer que**

$$\mathbf{E}(U_k) \geqslant k\mu - k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

$U_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ admet une espérance car les Y_i en admettent une.
On écrit ensuite $E(U_k) = E(T_k - V_k) = E(T_k) - E(V_k) = k\mu - E(V_k)$ (avec la question 9) ; et la majoration de 11(f)ii permet de conclure à ce qu'il faut.

ii. **En déduire que**

$$\left|\mathbf{E}(U_k) - k\mu\right| \leqslant k\varepsilon$$

$E(U_k) = k\mu - E(V_k) \leqslant k\mu$ car V_k est à valeurs positives ; donc $E(U_k) - k\mu \leqslant 0$ et $\left|\mathbf{E}(U_k) - k\mu\right| = k\mu - E(U_k)$.
Par ailleurs, avec 11(g)i et 11d :

$$\left|\mathbf{E}(U_k) - k\mu\right| = k\mu - E(U_k) \leqslant k \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leqslant k\varepsilon$$

iii. **Montrer que**

$$\mathbb{P}\left(\left|U_k - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|U_k - \mathbf{E}(U_k)\right| \geqslant k\varepsilon\right)$$

On montre l'inclusion entre événements suivante :

$$\left(\left|U_k - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right) \subset \left(\left|U_k - \mathbf{E}(U_k)\right| \geqslant k\varepsilon\right)$$

Supposons $|U_k - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon$; on peut alors écrire :

- soit $U_k - k\mu \geqslant 2k\varepsilon$; et dans ce cas $U_k - E(U_k) = (U_k - k\mu) + (k\mu - E(U_k))$.
  $U_k - k\mu \geqslant 2k\varepsilon$; et $k\mu - E(U_k) \geqslant -k\varepsilon$ d'après 11(g)ii donc finalement

$$U_k - E(U_k) \geqslant k\varepsilon$$

- soit $U_k - k\mu \leqslant -2k\varepsilon$; et dans ce cas $U_k - E(U_k) = (U_k - k\mu) + (k\mu - E(U_k))$.
  $U_k - k\mu \leqslant -2k\varepsilon$; et $k\mu - E(U_k) \leqslant k\varepsilon$ d'après 11(g)ii donc finalement

$$U_k - E(U_k) \leqslant -k\varepsilon$$

Dans tous les cas on obtient $\left|U_k - \mathbf{E}(U_k)\right| \geqslant k\varepsilon$ ce qui montre l'inclusion ; puis l'inégalité demandée en passant aux probas (si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$).

iv. **Montrer que**

$$\mathbf{V}(U_k) \leqslant km\mu$$

On rappelle que $U_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$.
Les X_i sont mutuellement indépendantes ; donc les Y_i le sont aussi par lemme des coalitions.
On a donc $\mathbf{V}(U_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V}(Y_i)$ (et l'existence de cette variance).
D'autre part le résultat admis en 11c donne $\mathbf{V}(Y_i) \leqslant m\mu$ pour tout i (tous les Y_i suivant la même loi). On en déduit

$$\mathbf{V}(U_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V}(Y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m\mu = km\mu$$

v. **En déduire que**

$$\mathbb{P}\left(\left|U_k - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

On enchaîne les résultats précédents avec Bienaymé -Tchebychev. En partant de 11(g)iii :

$$\mathbb{P}\left(\left|U_k - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|U_k - \mathbf{E}(U_k)\right| \geqslant k\varepsilon\right) \underbrace{\leqslant}_{\text{BT}} \frac{\mathbf{V}(U_k)}{(k\varepsilon)^2} \underbrace{\leqslant}_{11(g)iv} \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2} = \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

(h) i. **Montrer que pour tout couple d'événements** A **et** B **dans** $\mathscr{A}$**, on a**

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

On part de $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$; avec $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$ on a ce qu'il faut.

ii. **En appliquant l'inégalité précédente aux événements**

$$A = \left[V_k < k\varepsilon\right] \text{ et } B = \left[U_k \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right]$$

montrer que

$$\mathbb{P}\left(T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\right) \geqslant \mathbb{P}(V_k < k\varepsilon) + \mathbb{P}\left(U_k \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right) - 1$$

Le terme de droite de l'inégalité est exactement $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$; il faut donc examiner le rapport entre $A \cap B$ et $\left(T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\right)$.

Supposons A et B réalisés : dans ce cas $k(\mu - 2\varepsilon) < U_k < k(\mu + 2\varepsilon)$ et $0 < V_k < k\varepsilon$; d'où en sommant

$$k(\mu - 2\varepsilon) < \underbrace{U_k + V_k}_{=T_k} < k(\mu + 3\varepsilon)$$

ce qui ***implique*** que

$$k(\mu - 3\varepsilon) < T_k < k(\mu + 3\varepsilon)$$

Ainsi $(A \cap B) \subset \left(T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\right)$; puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_k \in \left]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)\right[\right) &\geqslant \mathbb{P}(A \cap B) \\
&\geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \\
&\geqslant \mathbb{P}(V_k < k\varepsilon) + \mathbb{P}\left(U_k \in \left]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)\right[\right) - 1
\end{aligned}$$

iii. **Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul,**

$$\mathbb{P}\Big(T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Big) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

On continue à compiler tout ce qui précède.

- $\mathbb{P}(V_k < k\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(V_k \geqslant k\varepsilon) \underbrace{\geqslant}_{11(f)ii} 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.$
- $\mathbb{P}\Big(U_k \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\Big) = \mathbb{P}\Big(|U_k - k\mu| < 2k\varepsilon\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(|U_k - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\Big)$ en reformulant l'encadrement puis en passant au contraire.
  Donc
  $$\mathbb{P}\Big(U_k \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\Big) \underbrace{\geqslant}_{11(g)v} 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

En reprenant l'inégalité de 11(h)ii :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Big) &\geqslant \mathbb{P}(V_k < k\varepsilon) + \mathbb{P}\Big(U_k \in \left]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\right[\Big) - 1 \\
&\geqslant \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}\right) + \left(1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}\right) - 1 \\
\mathbb{P}\Big(T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Big) &\geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

iv. **Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in \left[\sqrt{k}, 2\sqrt{k}\right]$ et conclure que**

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[\right) = 1$$

Rappelons le statut de ce « m » : on a supposé qu'il était supérieur à un certain m_0, qui servait dans l'introduction de ε.
Ici, k assez grand signifiera donc qu'on demande que $\sqrt{k}$ et $2\sqrt{k}$ soient supérieurs à m_0 (donc $k \geqslant (m_0)^2$).
On observe que

$$T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Leftrightarrow \frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[$$

On sait déjà que $\mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[\right) \leqslant 1$, car c'est une probabilité. Minorons-la donc avec 11(h)iii car on parle bien du même événement.

Pour k assez grand, on peut considérer $k \geqslant (m_0)^2$ et donc $\sqrt{k}$ et $2\sqrt{k}$ sont supérieurs à m_0 : si $m_k \in \left[\sqrt{k}, 2\sqrt{k}\right]$ la question précédente s'applique et on a

$$\mathbb{P}\Big(T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Big) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{(m_k)^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2}$$

- $m_k \leqslant 2\sqrt{k}$ donc $-\dfrac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} \geqslant -\dfrac{2\sqrt{k}\mu}{k\varepsilon^2} = -\dfrac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}$
- $m_k \geqslant \sqrt{k}$ donc $-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{(m_k)^{1-\alpha}}{\varepsilon} = -\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)(m_k)^{\alpha-1}\varepsilon} \geqslant -\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)k^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon}$ (avec $\alpha - 1 > 0$)

ce qui donne finalement :

$$\forall\, k \geqslant (m_0)^2,\ 1 \geqslant \mathbb{P}\Big(T_k \in \left]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\right[\Big) \geqslant \underbrace{1 - \frac{\alpha}{(\alpha-1)k^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon} - \frac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}}$$

L'accolade tendant vers 1 pour $k \to +\infty$, on en conclut

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in \left]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon\right[\right) = 1$$