

DS3

Exercice 1

Sur ces 3 tables, on voit la structure suivante:

* id-Artiste est une clé primaire de la table Artistes

* id-Musée _____ Musées

* Dans la table Œuvres, les Champs Auteur et Musée renvoient aux 2 autres tables: ce sont des clés étrangères.

1. CREATE TABLE Artistes (

id-Artiste INTEGER PRIMARY KEY,

Nom-Artiste TEXT,

Pays TEXT,

Siècle INTEGER)

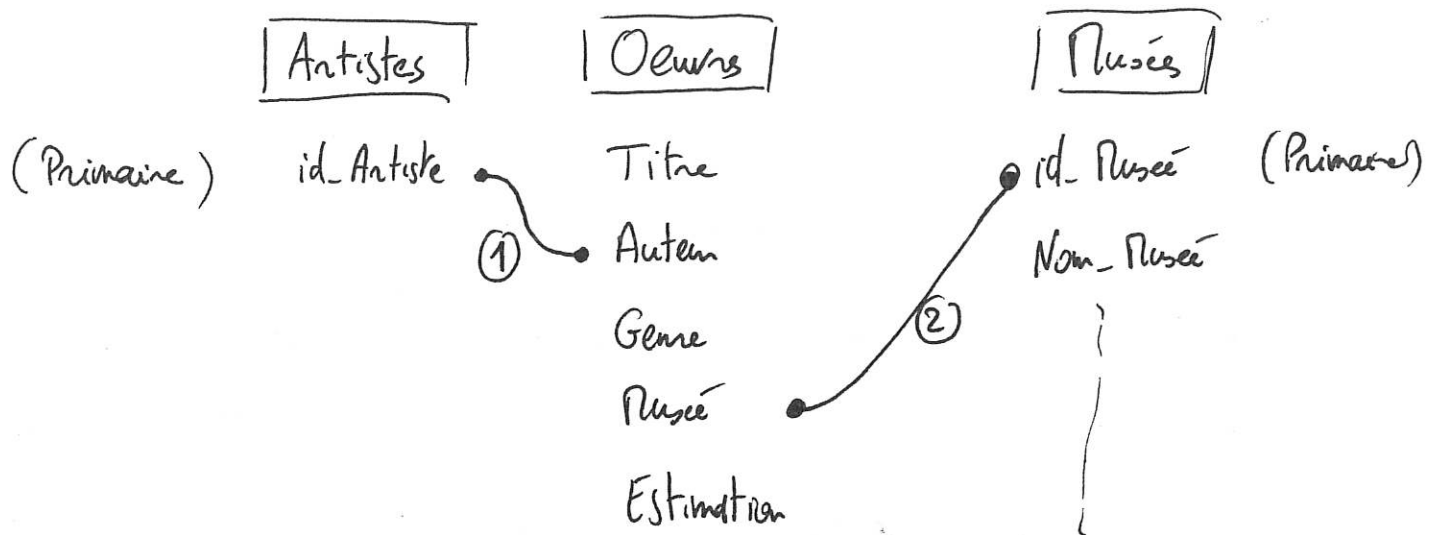
Puis:

INSERT INTO Artistes

VALUES (1, 'Picasso', 'Espagne', 20)

(attention aux guillemets ou apostrophes sur les champs TEXT!)

2) les clés étrangères sont comme décrit en début de corrigé.



Attention :

- * Dans la table **Oeuvres**, le champ Année est une clé étrangère qui pointe sur la clé primaire `id_Artiste`
- * Dans la table **Oeuvres**, le champ Musée —————
————— `id_Musée`.

3) On rappelle qu'on ne numérote pas les lignes : il faut aller chercher le siècle de Monet par un **WHERE** bien senti.

UPDATE Artistes

SET Siècle = 19

WHERE Nom_Artiste = 'Monet'

La. C'est parti pour les requêtes! Toujours se demander de quelle table on a besoin pour répondre à telle ou telle question. S'il y a plus d'une table il faut faire une jointure!

(a) `SELECT Nom_Artiste FROM Artistes
WHERE Pays = 'France'`

(b) `SELECT Nom_Musée, Pays
FROM Musées
ORDER BY Prix DESC`

(c) `SELECT AVG(Estimation)
FROM Oeuvres`

(d) Ici, le "titre" & l'auteur de Oeuvres; "Léonard de Vinci" des Artistes
→ JOINTURE, en suivant le chemin
clé étn ↔ clé prim. (2) du diagramme précédent

`SELECT Oeuvres.Titre
FROM Oeuvres INNER JOIN Artistes ON Artistes.id_Artiste = Oeuvres.Auteur
WHERE Artistes.Nom_Artiste = 'Léonard de Vinci'
AND Oeuvres.Genre = 'Peinture'`

(e) Cette fois on joint Oeuvres et Musées avec ① (car on veut :
"exposés en France")

SELECT Oeuvres.Titre, Oeuvres.Estimation

FROM Oeuvres INNER JOIN Musées ON Oeuvres.Musée = Musées.id_Musée

WHERE Musées.Pays = 'France' AND Oeuvres.Genre = 'Sculpture'

Exercice 2

Exercice 2

~~Ex~~

(1)

1a $N - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède 2 lignes identiques, donc
n'est pas inversible.

On en déduit: $1 \in \mathcal{S}_p(N)$

De plus $\text{rg}(N - I_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3)$ (ses colonnes)
 $=$
 $= \text{rg}(C_1, C_2) = \underline{\underline{2}}$ car C_1 et C_2 sont non colinéaires

Pour thm du rg sur $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est canonique
associé à $N - I_3$:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(N - I_3) &= \dim \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= 3 - \text{rg}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= 3 - \text{rg}(N - I_3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $E_1(N)$ est de dimension 1

1b. En Python on crée la matrice N de l'énoncé, puis on calcule
le produit matriciel (np.dot) suivant:

$(N^2 - I_3)(N - 3I_3)$. On obtient la nullité de ce
produit.

$(N^2 - I_3)(N - 3I_3) = 0$ donc $(X^2 - 1)(X - 3)$ est un polynôme annulateur de N . (2)

les racines de ce polynôme sont $1, -1, 3$: on a donc

$$\boxed{\operatorname{Sp}(N) \subset \{-1, 1, 3\}}$$

1c. On résout : $NX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3x \\ x + y = 3y \\ x + z = 3z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}}$$

~~$2x + 2y + x = 0$~~

d'où : $\boxed{E_3(N) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ ($\neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ donc $3 \in \operatorname{Sp}(N)$, ce qui était encore en suspens ...)

1d. $N \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(N)$
 $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(N)$
 $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et ± 1 sont rap
de N . On
a trouvé des
v.e.p.

1d. On a épuisé tous les "candidats de rang" donnés par 1b.

(3)

$$\text{D'où } Sp(N) = \{-1, 1, 3\}$$

On sait que $N \in M_3(\mathbb{R})$ donc $\underbrace{\dim E_{-1}}_{\geq 1} + \underbrace{\dim E_1}_{\geq 1} + \underbrace{\dim E_3}_{\geq 1} \leq 3$

On en déduit que tous les SEP de N sont de dimension 1;
et en connaissant des vecteurs particuliers on peut conclure

$$E_{-1}(N) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; E_1(N) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc forme
une base
de E_{-1} idem.

1e. Avec les consignes:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

est l'unique solution.

(4)

2a. Ne pas inverser P comme si on n'avait aucune info!

On calcule:

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

ce qui s'écrit aussi $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = I_3$

et on obtient $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$

2b. Récurrence:

$$* P \cdot D^0 \cdot P^{-1} = P I_3 P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = N^0$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } N^n &= P D^n P^{-1}, \quad N^{n+1} = N^n \times N \\ &= P D^n \underbrace{P^{-1} \times P}_{= I_3} D P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

d'où la propriété recherchée.

2c. Gros calcul. On a $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (D état diagonale)

$$\forall n \in \mathbb{N}, P D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 0 & -2 \times (-1)^n \\ 3^n & -1 & (-1)^n \\ 3^n & 1 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

puis $= \frac{1}{4} Q$

$$\begin{aligned}
 P D^n P^{-1} &= \frac{1}{4} P D^n Q \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 0 & -2 \times (-1)^n \\ 3^n & -1 & (-1)^n \\ 3^n & 1 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n + 2 \times (-1)^n & : & : \\ 3^n - (-1)^n & : & : \\ 3^n - (-1)^n & : & : \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La 1^{re} colonne de N^n est donc (attent° au $\frac{1}{4}$!)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} (3^n + (-1)^n) \\ \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \\ \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \end{pmatrix}$$

3a. D'après les règles: • si ville = 1 il faut tirer une nouvelle ville $\in \{1, 2, 3\}$ équiprobable

• si ville $\neq 1$, on renvoie 1 avec proba $\frac{2}{3}$,

et sinon la ville est inchangée.

On propose alors:

def ville_suivante (ville):

if ville == 1:

ville = rd.random(1, 4)

else:

if rd.random() < $\frac{2}{3}$:

return ville ville = 1

pas d'opérat°
nécessaire si on
ne doit pas
changer de ville!

3b. À partir de cela le code se construit avec une structure de type similaire à ceux qui calculent le t_{n-1}

$$\text{suite } u_{n+1} = f(u_n)$$

ville-suivante.

Comme on part de la ville 1 :

```
def factem (n):
    L = [1]
    ville = 1
    for k in range(n):
        ville = ville_suivante(ville)
        L.append(ville)
    return L
```

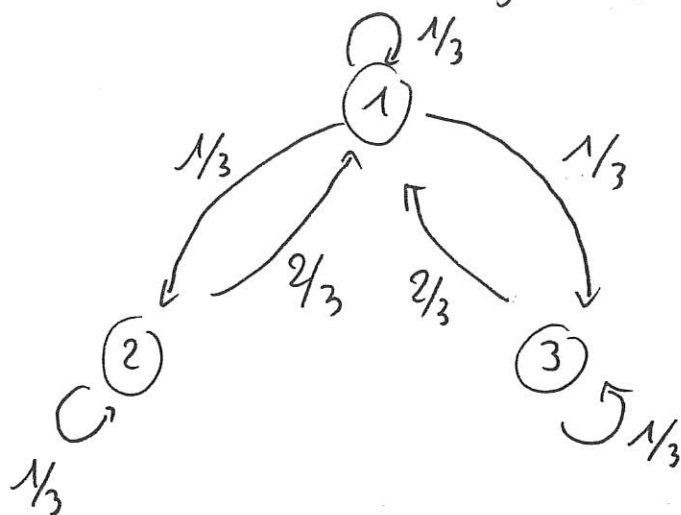
3c Ici il faut compter le nb d'apparition de chaque ville dans une trajectoire pré-calculée :

```
def freq-ville (n):
    freq = np.zeros(3)
    L = factem(n)
    for v in L:
        freq[v-1] = freq[v-1] + 1
    return freq/n
```

on incrémente le bon compteur :
freq[0] pour la ville 1, etc

et on divise pour avoir des fréquences ! /

4a. Le coefficient i, j de la matrice de transition est la proba, sachant qu'on est dans la ville i à un instant n , d'aller ds la ville j à l'instant $n+1$. (7)



$$\text{donc } M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

On observe bel et bien $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} {}^t N$

4b. Les états stads sont les lignes V tq $\begin{cases} V = VM \\ V_i \geq 0, \sum V_i = 1 \end{cases}$

On peut résoudre le système associé, on utilise ce qui est déjà fait: sur la matrice N :

$$\begin{aligned} V = VM &\Leftrightarrow {}^t M {}^t V = {}^t V \\ &\Leftrightarrow {}^t N {}^t V = 3 \times {}^t V \quad \text{donc } {}^t V \in E_3(N) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On obtient ${}^t V = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Sur $V = (2\alpha \quad \alpha \quad \alpha)$; la normalisat° $\sum V_i = 1$ impose alors

$$\underline{V = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)} \text{ unique état propre de la chaîne.}$$

4c Soit $j \in \{1, 2, 3\}$.

(8)

Par probas totales sur le SCE $\{(X_n=i)\}_{i=1,2,3}$:

$$P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^3 P((X_n=i) \cap (X_{n+1}=j))$$

$$= \sum_{i=1}^3 P(X_n=i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$$

si $P(X_n=i) \neq 0$

$$P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^3 m_{ij} P(X_n=i)$$

si $P(X_n=i)=0$, alors $P((X_n=i) \cap (X_{n+1}=j)) \leq P(X_n=i) = 0$

et l'égalité $P((X_n=i) \cap (X_{n+1}=j)) = m_{ij} P(X_n=i)$ reste vraie

En reconnaissant un produit matriciel :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n \Pi}$$

4d. Par récurrence $\boxed{V_n = V_0 \Pi^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- $V_0 \Pi^0 = V_0 I_3 = V_0$

- si $V_n = V_0 \Pi^n$, $V_{n+1} = V_n \Pi = V_0 \Pi^n \Pi = V_0 \Pi^{n+1}$

On a $V_0 = (1 \ 0 \ 0)$ au initial le facteur est en ①

~~donc~~ donc $V_n = (1 \ 0 \ 0) \Pi^n$ si la 1^{ère} ligne de Π^n

$$\text{Or } \Pi^n = \left(\frac{1}{3} {}^t N\right)^n = \frac{1}{3^n} {}^t(N^n) \text{ donc } \boxed{V_n = \frac{1}{3^n} \times [1^{\text{ère}} \text{ colonne de } N^n]}$$

Il suffit alors de reprendre le résultat de 2c:

(9)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) & \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n} \right) & \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n} \right) \end{pmatrix}}$$

5a $X_n(\Omega)$ est fini donc cette espérance existe

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) &= P(X_n=1) + 2 P(X_n=2) + 3 P(X_n=3) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) + \frac{2}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_n) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n}$$

5b les $P(X_n=i)$ sont les composants de V_n .

$\left| -\frac{1}{3} \right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = 0$ ce qui fournit rapidement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=3) = \frac{1}{4}$$

et on constate $\boxed{V_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} : \text{l'état stable}}$

là on sort de l'exo type "sur le chaîne de Markov..."

(10)

6. Encore une adaptat° de "code $u_{n+1} = f(u_n)$ " sans que cette fois on arrête le code dès qu'une certaine cdt° est réalisée !

def temps 3 () :

$n = 0$ # nb d'étaps

ville = 1

while ville $\neq$ 3 :

ville_suivante = ville

$n = n + 1$

return n

7a. Par lecture de l'événement :

$U_{1,n}$ (resp. $U_{2,n}$) est l'événement qui consiste à être ds la ville 1 (resp. la ville 2) au temps n , en n'étant jamais passé dans la ville 3

7b. C'est clair d'après ce qui précède !

Plus formellement :

$$\begin{aligned} (B > n) &= \bigcap_{k=0}^n (X_k \neq 3) = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \right) \cap (X_n \neq 3) \\ &= \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \right) \cap ((X_n = 1) \cup (X_n = 2)) \\ &= \left[\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \right) \cap (X_n = 1) \right] \cup \left[\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \right) \cap (X_n = 2) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (B > n) = U_{1,n} \cup U_{2,n}$$

(11)

8a.

$$\begin{aligned} & U_{1,n+1} \cap (X_n = 1) \\ &= \bigcap_{k=0}^{n+1} (X_k \neq 3) \cap (X_n = 1) \\ &= \underbrace{\bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \cap (X_n \neq 3) \cap (X_n = 1)}_{U_{1,n}} \cap (X_{n+1} = 1) \quad \text{en isolant les deux derniers} \\ &\hspace{15em} \text{termes de l'intersection.} \\ &= \underline{U_{1,n} \cap (X_{n+1} = 1)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(U_{1,n+1} \cap (X_n = 1)) &= P(U_{1,n} \cap (X_{n+1} = 1)) \\ &= P(U_{1,n}) \times P_{U_{1,n}}(X_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On } P_{U_{1,n}}(X_{n+1} = 1) &= P_{\underbrace{(X_0 \neq 3) \cap \dots \cap (X_{n-1} \neq 3) \cap (X_n = 1)}}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad \text{n'intervient pas ds} \\ &\quad \text{le conditionn}^r \text{ par } \underline{\text{propriété}} \\ &\quad \text{de Markov !!} \end{aligned}$$

$$= P_{(X_n = 1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{et on obtient bien } \boxed{P(U_{1,n+1} \cap (X_n = 1)) = \frac{1}{3} \times P(U_{1,n})}$$

la seconde ligne est similaire :

(12)

$$\begin{aligned} U_{1,n+1} \cap (X_n=2) &= \bigcap_{k=0}^{n-1} (X_k \neq 3) \cap (X_n=2) \cap (X_{n+1}=1) \\ &= U_{n,2} \cap (X_{n+1}=1) \end{aligned}$$

et la proba cond. $P_{U_{n,2}}(X_{n+1}=1) = P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{3}$ permet de conclure.

8b. Probas totales bien sûr !

Avec le SCE $((X_n=i))_{i=1,2,3}$

$$P(U_{1,n+1}) = \sum_{i=1}^3 P(\underbrace{U_{1,n+1} \cap (X_n=i)}_{\text{impossible pour } i=3})$$

car sous $U_{1,n+1}$ on ne peut pas être ds la ville 3 au rg n !

$$= P(U_{1,n+1} \cap X_n=1) + P(U_{1,n+1} \cap X_n=2)$$

$$\boxed{P(U_{1,n+1}) = \frac{1}{3} P(U_{1,n}) + \frac{2}{3} P(U_{2,n}) \quad \text{avec 8a}} \quad \left| \right.$$

9a. $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ où $a_0 = P(U_{0,1}) = P(X_0=1) = 1$
 $b_0 = P(U_{0,2}) = P(X_0=2) = 0$

$$\Rightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9b. les deux relat° de 8b donner:

(10)

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \end{cases}$$

Ce qui s'écrit $U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_A U_n$

On tire de cela $U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; on calcule A^n en la diagonaliser ($A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^n P^{-1}$; c'est ce qui est fait en q1 et q2 pour N)

et on conclut à une forme explicite pour a_n et b_n .

NB: Si vous le faites, vous trouverez notamment $\mathcal{P}(A) = \left\{ \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3} \right\}$

9c. 7b donne, avec $U_{1,n}$ et $U_{2,n}$ clairement disjoints:

$$\begin{aligned} P(B > n) &= P(U_{1,n} \cup U_{2,n}) \\ &= P(U_{1,n}) + P(U_{2,n}) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{P(B > n) = a_n + b_n}$$

En utilisant les dents:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B > n) = \frac{1}{2\sqrt{2} \times 3^n} \left(\overset{(1)}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n} + \overset{(2)}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n} + \overset{(1)}{(1+\sqrt{2})^n} - \overset{(2)}{(1-\sqrt{2})^n} \right)$$

et en regroupant (1)+(1), (2)+(2) il y a une factorisation:

$$\boxed{\text{then, } P(B > n) = \frac{1}{2\sqrt{2} \times 3^n} \left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} \right)}$$

(14)

10
"On admet" ... mais cela n'a plus de secret pour vous!

$$P(B_n) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4 \text{ donc } \left| \frac{1+\sqrt{2}}{3} \right| < 1, \quad \left| \frac{1-\sqrt{2}}{3} \right| < 1$$

et la série de terme général $P(B > n)$ converge (géométrique)

Il "suffit" maintenant de sommer:

$$E(B_n) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1} \right) \quad (\text{les deux sommes cv})$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n + \frac{\sqrt{2}-1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3} \right)^n \right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{2}}{3}} + \frac{\sqrt{2}-1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{2}}{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left((1+\sqrt{2}) \frac{1}{3 - (1+\sqrt{2})} + (\sqrt{2}-1) \frac{1}{3 - (1-\sqrt{2})} \right)$$

$$E(B_n) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} \right) \dots$$

$$E(B_n) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2 + 3\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 2 - 2 + \sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{3 \times 6\sqrt{2}}{4 \times \sqrt{2}}$$

$$\boxed{E(B_n) = \frac{9}{2}} \quad \text{("} \text{)}$$

(NB: en fait ce n'est pas complètement de la magie noire de trouver une expression simple de l'espérance mais cela sort du cadre du programme)

Exercice 3

$$(E) : y' = (-2t+1)y$$

1a. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z : t \mapsto y(t)e^{t^2}$

Calculons z' , en utilisant le fait que y est solut. de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = \underbrace{y'(t)}_{\substack{\text{car } y \text{ solut.} \\ \text{de (E) !!}}} e^{t^2} + 2t y(t) e^{t^2}$$

$$= (-2t+1)y(t) e^{t^2} + 2t y(t) e^{t^2}$$

$$= y(t) e^{t^2} = z(t)$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = z(t) : \quad z \text{ est solut. de } z' - z = 0$$

1b. Les solut. de $z' - z = 0$ sont les fct. $t \mapsto K e^t$ où $K \in \mathbb{R}$.

Ainsi : y solut. de (E) $\Leftrightarrow z : t \mapsto K e^t$ où $K \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y(t) e^{t^2} = K e^t$$

$$\boxed{y \text{ solut. de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = K e^{t-t^2} \text{ où } K \in \mathbb{R}}$$

Partie 2

2a. En notant C_i les colonnes de A : $C_2 = 2C_1$, $C_3 = -C_1$

$$\text{Ainsi } \text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1) = 1 \\ \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}.$$

2b. $\text{rg}(A) = 1 < 3$ donc A non inv. ; donc $0 \in \mathcal{S}(A)$

$$\text{On résout: } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x - 2y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2x + y.$$

$$\text{ce qui fournit ainsi directement } \boxed{\text{Ker}(A) = \mathcal{E}_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

2 vect non colinéaires
→ libre
→ base de $\mathcal{E}_0(A)$

2c. Il suffit de calculer :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on en déduit que c'est 1 rep de A , associé à la rap -

2d. On achève ss calcul la recherche des rap / eq.

$$\dim(E_0(A)) = 2 \quad (\text{cf 2b})$$

$$A \in M_3(\mathbb{R}) \text{ donc } \sum \dim E_\lambda(A) \leq 3.$$

$$\text{On en déduit } \dim E_{-6}(A) \leq 1 \quad ; \text{ comme } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-6}(A) \text{ on a}$$

$$\boxed{E_{-6}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$\dim E_0(A) + \dim E_{-6}(A) = 3 \text{ donc il n'y a pas d'autre v.p.}$$

En concaténant les bases des SEP :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ est inversible (colonnes libres)}$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & & -6 \end{pmatrix} \text{ vérifie } A = PDP^{-1}$$

$$3. \text{ Soient } x(t) = 1 + e^{-6t} ; y(t) = 2e^{-6t} ; z(t) = 1 - e^{-6t}$$

On vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -x(t) - 2y(t) + z(t) &= -1 - e^{-6t} - 4e^{-6t} + 1 - e^{-6t} \\ &= -6e^{-6t} = \underline{\underline{x'(t)}} \end{aligned}$$

et de même les deux autres équations sont vérifiées.

On en déduit que la fct x proposée est bien solut. de (S)

4a. C'est littéralement le théorème de Cauchy.

X_1 et X_2 sont deux sol^o du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{on a noté } X_0 = X_1(t_0) = X_2(t_0))$$

donc d'après le théorème de Cauchy elles sont égales

4b. La sol^o nulle $N: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est sol^o de $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

donc d'après ce qui précède,

l'unique sol^o de (S1) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la sol^o nulle

5. Formule de cours avec la base de vecteurs propres obtenue en 2d

les sol^o de (S) sont les fct^o
$$t \mapsto K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t} \quad \text{ou } (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$$

les points d'équilibre sont les éléments de $\text{Ker}(A)$, donc les sol^o

$t \mapsto K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. [la solut^o recherchée existe et est unique par Cauchy mais ça ne nous avance pas bcp!]

On reprend la forme générale de 5:

On recherche donc K_1, K_2, K_3 tels que

$$K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6x0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} K_1 + K_3 = 1 \\ K_2 + 2K_3 = 1 \\ 2K_1 + K_2 - K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_3 = 1 \\ K_2 + 2K_3 = 1 \\ K_2 - 3K_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_3 = 1 \\ K_2 + 2K_3 = 1 \\ -5K_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K_3 = \frac{3}{5} ; K_2 = 1 - 2K_3 = -\frac{1}{5} ; K_1 = 1 - K_3 = \frac{2}{5}$$

$$\text{et } X: t \mapsto \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$$

$$X: t \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3e^{-6t} \\ -1 + 6e^{-6t} \\ 3 - 3e^{-6t} \end{pmatrix}$$

7°) la figure 2 montre un dessin où x, y, z ont des limites infinies: c'est impossible car $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-$

la figure 3 donne de mauvaises condit^o initiales: on y lit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

la bonne figure est donc la figure 1.

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$