Programme de colle n°12

Semaine du 12/01

Systèmes différentiels

Pour cette colle, ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » est de savoir résoudre un système différentiel pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, avec n pas trop grand.

Systèmes différentiels linéaires

- Rappels d'ECG1 : résolution, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, de $y' + ay = 0$, $y'' + ay' + by = 0$ (lorsque l'équation caractéristique a au moins une racine réelle).
- Résolution d'équations non homogènes (la recherche d'une solution particulière doit être guidée).
- Prise en compte d'une condition initiale.
- Systèmes différentiels $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
  Résolution par diagonalisation de A, en posant $X = PY$; ou en écrivant $X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$ où (C_i) est une base de vecteurs propres.
- Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy (cas scalaire d'ordre 1 ou d'ordre 2 ; cas vectoriel)
- Quelques aspects qualitatifs :
  - trajectoire (l'ensemble des $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$
  - trajectoire convergente (les x_i ont une limite finie pour $t \to +\infty$)
  - point d'équilibre (ce sont les solutions constantes).

  Résultats associés : pour le système $(S) : X' = AX$:
  - Les points d'équilibre de (S) sont les éléments de $\mathrm{Ker}(A)$.
  - Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$, toute trajectoire converge vers un point d'équilibre.
  - Si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$, toute trajectoire converge vers $(0, \dots, 0)$.
  - Si A admet une valeur propre > 0 il existe des solutions divergentes.