DM 2
Corrigé

Exercice 1

On considère les matrices :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$**.**

1. **Donner une base et la dimension de** $\mathscr{F}$**.**

   Il est facile de vérifier (mais il faut le faire, et ne pas dire que I,J,K sont non colinéaires !!!) que $(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$ est libre ; c'est donc une base de l'espace qu'elle engendre.
   $\dim(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}\,(\{\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}\}) = 3$.

2. **Calculer les produits** $\mathrm{J}^2, \mathrm{K}^2, \mathrm{JK}, \mathrm{KJ}$**. En déduire que** $\mathscr{F}$ **est *stable par produit*, c'est-à-dire :** $\forall\,(\mathrm{M},\mathrm{M}') \in \mathscr{F}^2$, $\mathrm{MM}' \in \mathscr{F}$**.**

   Calcul direct : $\mathrm{J}^2 = \mathrm{K}$, $\mathrm{K}^2 = \mathrm{KJ} = \mathrm{JK} = \mathbf{0}$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).
   Avec ces formules les calculs se simplifient un peu : si $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$ et $\mathrm{N} = d\mathrm{I} + e\mathrm{J} + f\mathrm{K}$ sont deux éléments de $\mathscr{F}$ alors

   $$\mathrm{MN} = (a\mathrm{I}+b\mathrm{J}+c\mathrm{K})(d\mathrm{I}+e\mathrm{J}+f\mathrm{K}) = ad\mathrm{I}+ae\mathrm{J}+af\mathrm{K}+bd\mathrm{J}+be\mathrm{K}+cd\mathrm{K} = (ad)\mathrm{I}+(ae+bd)\mathrm{J}+(af+be+cd)\mathrm{K} \in \mathscr{F}$$

   et on a bien la stabilité par produit.

3. **On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de** $\mathscr{F}$**. Pour** $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$**, on note** $\mathrm{M}(a,b,c) = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$**.**

   (a) **Montrer que M est inversible ssi** $a \neq 0$**.**

   $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est triangulaire, donc inversible ssi tous ses coeff diagonaux sont non nuls.
   Ceci équivaut bien ici à $a \neq 0$.

   (b) **Pour** $(b,c,x,y) \in \mathbb{R}^4$**, calculer le produit** $\big(\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}\big)\big(\mathrm{I} + x\mathrm{J} + y\mathrm{K}\big)$**. En déduire** $\mathrm{M}(1,b,c)^{-1}$**.**

   Utiliser la question 2 !!
   En changeant le nom des coefficients

   $$\big(\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}\big)\big(\mathrm{I} + x\mathrm{J} + y\mathrm{K}\big) = \mathrm{I} + (b+x)\mathrm{J} + (y+bx+c)\mathrm{K}$$

   On pense alors à chercher l'inverse de $\mathrm{M}(1,b,c)$ sous la forme $\mathrm{M}(1,x,y)$ avec x et y convenables.
   D'après le calcul précédent, si $b+x=0$ et $y+bx+c=0$, on aura bien $\big(\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}\big)\big(\mathrm{I} + x\mathrm{J} + y\mathrm{K}\big) = \mathrm{I}$.
   On résout alors :

   $$\begin{cases} b+x=0 \\ y+bx+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-b \\ y=-c-bx=b^2-c \end{cases}$$

   et on a donc $\mathrm{M}(1,b,c)^{-1} = \mathrm{M}(1,-b,b^2-c)$.

4. **On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice** $\mathrm{M}(1,1,1) = \mathrm{I} + \mathrm{J} + \mathrm{K}$.

(a) **Exprimer $\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\right)^2$ et $\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\right)^3$ comme des combinaisons linéaires de $\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}$.**
On utilise encore le calcul :

$$(a\mathrm{I}+b\mathrm{J}+c\mathrm{K})(d\mathrm{I}+e\mathrm{J}+f\mathrm{K}) = (ad)\mathrm{I}+(ae+bd)\mathrm{J}+(af+be+cd)\mathrm{K}$$

Pour $a=b=c=d=e=f=1$: $(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^2 = \mathrm{I}+2\mathrm{J}+3\mathrm{K}$
Et avec $a=b=c=d=1$, $e=2$ et $f=3$:

$$(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^3 = (\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^2 = (\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})(\mathrm{I}+2\mathrm{J}+3\mathrm{K}) = \mathrm{I}+3\mathrm{J}+6\mathrm{K}$$

(b) **Justifier que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que**

$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\right)^n = a_n\mathrm{I}+b_n\mathrm{J}+c_n\mathrm{K}$$

Justifier que ces réels sont uniques.
$(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^0 = \mathrm{I}\in\mathscr{F}$.
Par stabilité de $\mathscr{F}$ par produit on a immédiatement : $\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\in\mathscr{F} \Rightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ (\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^n\in\mathscr{F}$; ce qui par définition de $\mathscr{F}$ signifie que $(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^n$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}$.
Les coefficients intervenant dans cette combinaison linéaire sont uniques : ce sont les coordonnées de $(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^n$ dans la *base* $\{\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}\}$. Par ailleurs .

Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
Encore un petit calcul :

$$(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^{n+1} = (\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^n\times(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}) = (a_n\mathrm{I}+b_n\mathrm{J}+c_n\mathrm{K})(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}) = a_n\mathrm{I}+(a_n+b_n)\mathrm{J}+(a_n+b_n+c_n)\mathrm{K}$$

d'où par unicité des réels $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = a_n+b_n \\ c_{n+1} = a_n+b_n+c_n \end{cases}$$

(c) **Déterminer la valeur de a_n pour tout $n\in\mathbb{N}$; puis de b_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.**

La suite (a_n) est constante (première équation) : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_n = a_0 = 1$ (car $(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^0 = \mathrm{I} = \mathrm{I}+0.\mathrm{J}+0.\mathrm{K}$ donne $a_0=1$, $b_0=c_0=0$).

On a alors : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n+1$ et $b_0=0$. (b_n) est donc arithmétique et on a directement : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ b_n = n$.

(d) **Montrer :** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ c_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$**.**

On a ensuite : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ c_{n+1} = c_n+n+1$. Avec $c_0=0$ on a le résultat souhaité par une récurrence sans difficulté.

5. **On rappelle que pour M inversible, on définit $\mathrm{M}^{-n} = \left(\mathrm{M}^{-1}\right)^n$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier $n>0$, on a**

$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K}\right)^{-n} = \mathrm{I}-n\mathrm{J}+\frac{n(n-1)}{2}\mathrm{K}$$

Il suffit de reprendre la question 3b.

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^{-n} = ((\mathrm{I}+\mathrm{J}+\mathrm{K})^n)^{-1} = (a_n\mathrm{I}+b_n\mathrm{J}+c_n\mathrm{K})^{-1} = \left(\mathrm{I}+n\mathrm{J}+\frac{n(n+1)}{2}\mathrm{K}\right)^{-1} &= \mathrm{I}-n\mathrm{J}+\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right)\mathrm{K} \\ &= \mathrm{I}-n\mathrm{J}+\frac{n(n-1)}{2}\mathrm{K}\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant m) > 0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
On pose $\mathbb{P}(X = 0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. **On pose $q = 1 - p$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.**

   Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$.
   $p > 0$ d'après l'énoncé donc $q < 1$; de plus d'après l'énoncé : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant m) > 0$; donc $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = q > 0$.

2. **Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X \geqslant n+m) = \mathbb{P}(X \geqslant m)\mathbb{P}(X \geqslant n)$.**

   On part de la propriété sans mémoire : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.
   (NB : $\mathbb{P}_(X \geqslant m) > 0$ donc pas de souci de définition).
   Par définition d'une conditionnelle :
   $$\frac{\mathbb{P}\big((X \geqslant m) \cap (X \geqslant n+m)\big)}{\mathbb{P}(X \geqslant m)} = \mathbb{P}(X \geqslant n)$$
   Or comme $m + n \geqslant m$ on a $(X \geqslant m) \supset (X \geqslant n+m)$ et donc
   $$\mathbb{P}\big((X \geqslant m) \cap (X \geqslant n+m)\big) = \mathbb{P}(X \geqslant n+m)$$
   On a finalement
   $$\frac{\mathbb{P}(X \geqslant n+m)}{\mathbb{P}(X \geqslant m)} = \mathbb{P}(X \geqslant n)$$
   ce qui donne la propriété voulue.

3. **Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.**

   (a) **Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.**

   Pour $m = 1$ la propriété précédente s'écrit :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geqslant n+1) = \mathbb{P}(X \geqslant 1)\mathbb{P}(X \geqslant n)$$
   ce qui montre que la suite $\big(\mathbb{P}(X \geqslant n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = q$.

   (b) **Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ en fonction de n et de q.**

   On déduit immédiatement, par formule générale des suites géométriques :
   $$\forall n \in,\ \mathbb{P}(X \geqslant n) = q^n \mathbb{P}(X \geqslant 0) = q^n$$
   ($\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$ car X à valeurs positives).

   (c) **Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1)$.**

   Comme X est à valeurs entières on a l'union disjointe : $(X \geqslant n) = (X = n) \cup (X \geqslant n+1)$; ce qui donne $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X \geqslant n+1)$ en passant aux probas.

   (d) **En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = n) = q^n p$.**

   On rassemble les résultats précédents :
   $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1) \\ &= q^n - q^{n+1} \\ &= q^n(1-q) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) &= q^n p \end{aligned}$$

4. (a) **Reconnaître la loi suivie par la variable $X+1$.**

$X(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $(X+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$; et

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X+1=n=\mathbb{P}(X=n-1)=q^{n-1}p$$

avec la loi précédente (on a bien $n-1\in\mathbb{N}$).
On reconnaît $X+1\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

(b) **En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.**

D'après le cours :

- $\mathbb{E}(X+1)$ existe et vaut $\dfrac{1}{p}$; donc par linéarité $\mathbb{E}(X)$ existe aussi, et $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X+1)-1=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{q}{p}$;
- $\mathbb{V}(X+1)$ existe et vaut $\dfrac{q}{p^2}$; donc par linéarité $\mathbb{V}(X)$ existe aussi, et $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(X+1)=\dfrac{q}{p^2}$.

Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.
Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y\geqslant n)>0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n=\mathbb{P}_{(Y\geqslant n)}(Y=n)$.

5. (a) **Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n=\dfrac{\mathbb{P}(Y=n)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}$.**

Ici aussi l'énoncé assure la bonne définition de la proba conditionnelle : $\mathbb{P}(Y\geqslant n)>0$.
On calcule ensuite :

$$\lambda_n=\mathbb{P}_{(Y\geqslant n)}(Y=n)=\frac{\mathbb{P}\big((Y=n)\cap(Y\geqslant n)\big)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}=\frac{\mathbb{P}(Y=n)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}$$

car au niveau des événements : $(Y=n)\cap(Y\geqslant n)=(Y=n)$.

(b) **En déduire que: $\forall n\in\mathbb{N},\ 1-\lambda_n=\dfrac{\mathbb{P}(Y\geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}$.**

On trouve alors

$$1-\lambda_n=1-\frac{\mathbb{P}(Y=n)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}=\frac{\mathbb{P}(Y\geqslant n)-\mathbb{P}(Y=n)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}=\frac{\mathbb{P}(Y\geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)}$$

où on a utilisé la formule de 3c (Y étant bien à valeurs entières).

(c) **Établir alors que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\lambda_n<1$.**

Comme $\mathbb{P}(Y\geqslant n+1)$ et $\mathbb{P}(Y\geqslant n)$ sont >0 d'après l'énoncé, $1-\lambda_n>0$ et donc $\lambda_n<1$.
De plus $(Y\geqslant n+1)\subset(Y\geqslant n)$ donc $\mathbb{P}(Y\geqslant n+1)\leqslant\mathbb{P}(Y\geqslant n)$ et donc $1-\lambda_n\leqslant 1$: $\lambda_n\geqslant 0$.

(d) **Montrer par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y\geqslant n)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.**

Pour $n=1$ la propriété à démontrer s'écrit

$$\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\lambda_0$$

Or d'après 5b

$$1-\lambda_0=\frac{\mathbb{P}(Y\geqslant 1)}{\mathbb{P}(Y\geqslant 0)}=\mathbb{P}(Y\geqslant 1)$$

($\mathbb{P}(Y\geqslant 0)=1$) ce qui établit bien la propriété.
Soit maintenant $n\in\mathbb{N}^*$; on suppose $\mathbb{P}(Y\geqslant n)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.
Alors :

$$\mathbb{P}(Y\geqslant n+1)\underbrace{=}_{5b}(1-\lambda_n)\mathbb{P}(Y\geqslant n)=(1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)=\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k)$$

et la propriété est bien héréditaire ; ce qui permet de conclure.

Remarque : on pouvait aussi voir un produit téléscopique :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mathbb{P}(Y \geqslant n)}{\mathbb{P}(Y \geqslant 0)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(Y \geqslant k+1)}{\mathbb{P}(Y \geqslant k)} = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\lambda_k)$$

et on conclut avec $\mathbb{P}(Y \geqslant 0) = 1$.

6. (a) **Montrer que :** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - \mathbb{P}(Y \geqslant n)$**.**

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$; or on peut découper cette dernière somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = 1$$

et on reconnaît bien

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(Y \geqslant n) = 1$$

(b) **En déduire que** $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant n) = 0$**.**

Pour $n \to +\infty$, par définition de la convergence de la série :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) \right) = 1$$

donc $1 - \mathbb{P}(Y \geqslant n) \to 1$ et on a bien la limite voulue.

(c) **Montrer que** $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) \right) = +\infty$

On part de l'expression de 5d et on prend le ln ($\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$ d'après l'énoncé) :

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{P}(Y \geqslant n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1-\lambda_k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\lambda_k) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = -\ln(\mathbb{P}(Y \geqslant n))$$

Or $\mathbb{P}(Y \geqslant n) \to 0$, ce qui donne $-\ln(\mathbb{P}(Y \geqslant n)) \to +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) \right) = +\infty$$

(d) **En déduire la nature de la série de terme général** λ_n**.**

On voudrait utiliser l'équivalent $\ln(1-\lambda_k) \sim -\lambda_k$... mais a-t-on $\lambda_k \to 0$??
En fait cela fait partie de la discussion :

- Si (λ_n) ne tend pas vers 0 en $+\infty$, alors $\sum \lambda_n$ diverge grossièrement ;
- Si $\lambda_n \to 0$ on a $-\ln(1-\lambda_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(-\lambda_n) = \lambda_n$ et par équivalence de SATP les séries $\sum \lambda_n$ et $\sum -\ln(1-\lambda_n)$ sont de même nature.
  Comme on vient de voir que $\sum -\ln(1-\lambda_n)$ diverge (ses sommes partielles tendent vers $+\infty$) on en déduit ici encore la divergence de $\sum \lambda_n$.

Dans tous les cas $\sum \lambda_n$ diverge.

7. **On suppose ici que** $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$**, avec** $\alpha > 0$**.**

(a) **Pour** $n \in \mathbb{N}^*$**, donner l'expression de** $\mathbb{P}(Y \leqslant n-1)$ **sous forme d'une somme finie ; en déduire une expression de** $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$**.**

Avec la formule de cours :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y \leqslant n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}$$

puis comme Y est à valeurs entières :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1) = 1 - e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}$$

(b) **Écrire une fonction Scilab d'en-tête** `function p=Poisson(n,alpha)` **qui calcule** $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ **pour** $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$**.**
On admet $n!$ ***s'obtient en Python par*** `np.math.factorial(n)`**.**

On peut y aller très brutalement avec la fonction factorielle :

```
def Poisson(n,alpha):
    return 1-np.exp(-alpha)*
        np.sum([alpha**k/np.math.factorial(k) for k in range(n)])
```

MAIS c'est très malhabile car on se refait le calcul de la factorielle à chaque étape.
On peut procéder de la manière suivante : pour passer de $\frac{\alpha^k}{k!}$ à $\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$ il suffit de multiplier par $\frac{\alpha}{k}$.
On construit alors les $\frac{\alpha^k}{k!}$ de proche en proche et on les ajoute à la somme.

```
def Poisson2(n,alpha):
    s=1
    p=1
    for k in range(1,n):
        p=alpha/k*p
        s=s+p
    return 1-np.exp(-alpha)*s
```

(c) **En déduire une fonction Python** `Taux_Panne(n,alpha)` **qui calcule le taux de panne de Y à l'instant** n**. On pourra utiliser la fonction programmée en question 7b.**

Le « mieux » est de reprendre 5b :

$$\lambda_n = 1 - \frac{\mathbb{P}(Y \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)}$$

et on code immédiatement

```
def Taux_Panne(n,alpha):
    return 1-Poisson2(n+1,alpha)/Poisson2(n,alpha)
```

mais là encore c'est très faible : lors du calcul de `Poisson2(n+1,alpha)` on refait tout ce qui a été fait en `Poisson2(n,alpha)` !
Il vaut mieux attraper au vol les bonnes quantités

```
def Taux_Panne(n,alpha):
    s=1
    p=1
    for k in range(1,n):
        p=alpha/k*p
        s=s+p
    t1=1-np.exp(-alpha)*s
    # t1 = P(Y>=n)
    # et on rajoute encore un terme
    p=alpha/n*p
    s=s+p
```

```python
    t2=1-np.exp(-alpha)*s
    # t2 = P(Y>=n+1)
    return 1-t2/t1
```

Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X**.**

8. **Déterminer le taux de panne de la variable** X **dont la loi a été trouvée à la question 3d.**

   On rappelle que $\mathbb{P}(X = n) = q^n p$, et $\mathbb{P}(X \geqslant n) = q^n$. Avec la définition du taux de panne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)} = p$$

   On obtient un taux de panne constant.

9. **On considère une variable aléatoire** Z**, à valeurs dans** $\mathbb{N}$**, et vérifiant :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0$**. On suppose que le taux de panne de** Z **est constant, c'est-à-dire que l'on a :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \lambda$**.**

   (a) **Montrer que** $0 < \lambda < 1$**.**

   On a déjà vu $0 \leqslant \lambda < 1$ (on est bien dans les hypothèses de la partie 2).
   Si $\lambda = 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = n) = 0$: c'est absurde.
   On a donc bien $0 < \lambda < 1$.

   (b) **Pour tout** n **de** $\mathbb{N}$**, déterminer** $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ **en fonction de** λ **et** n**.**

   D'après 5d :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda) = (1-\lambda)^n$$

   d'où : $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geqslant n) - \mathbb{P}(Z \geqslant n+1) = (1-\lambda)^n - (1-\lambda)^{n+1} = (1-\lambda)^n \lambda$.

   (c) **Conclure que les seules variables aléatoires** Z **à valeurs dans** $\mathbb{N}$**, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout** n **de** $\mathbb{N}, \mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0$**, sont les variables dont la loi est du type de celle de** X**.**

   C'est ce qu'on vient de faire : si le taux de panne est constant on retrouve la loi de X (question 9b) ; et la loi de X donne bien un taux de panne constant (question 8).