Comparaison des fonctions, développements limités
Exercices

Exercice 1. (Équivalents)
Donner des équivalents simples en $x \to +\infty$, puis en $x \to 0$, des expressions suivantes :

$$x^3 - x \qquad x^4 - x^2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad e^{2x} - x^5 \qquad xe^x + x^4$$

$$xe^{2x} + e^{3x} \qquad \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x\ln(x) + x^{3/2}$$

$$\frac{2}{x^5} - e^{-x} \qquad \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \qquad \ln\left(\frac{x+2}{x^3}\right)$$

Dans le dernier cas, on pourra factoriser la dernière expression dans le ln par $\frac{1}{x^2}$ *pour examiner l'un des deux équivalents.*

Exercice 2. (Calcul de développements limités et applications) (*)
Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.
Pour les fonctions f et g, déduire de ce DL l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction ; ainsi que, si possible, la position relative de la courbe et de la tangente.

$$e^{2x} - 2\ln(1+x) \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+x}} \qquad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \qquad \frac{1}{2-x} \qquad (1-x)^x$$

Exercice 3. (Calcul de développements limités, plus difficile)
Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.
Déduire de ces DL l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction ; ainsi que, si possible, la position relative de la courbe et de la tangente.

$$e^{\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{1+\ln(1+x)} \qquad \frac{1}{1+e^x}$$

Exercice 4. (Développements en en $a \neq 0$, en $\pm\infty$)

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$ au point $x_0 = 1$.
2. Développer les expressions suivantes à la précision $\frac{1}{x^2}$ (*ie* les écrire sous la forme $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) au voisinage de $+\infty$:

   $$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \qquad \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

   NB : pour le second, montrer que $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
3. Déterminer a, b, c réels tels que $\sqrt{1+x^2}e^{1/x} \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5. (Calcul de limites) (*)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^4-x^3} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(2^{1/n}-1\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-1\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}}-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans le cas d'une suite de limite nulle, donner également la nature de $\sum u_n$.

Exercice 6 (Étude locale d'un prolongement). Soit f définie par $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f ; montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera $\widetilde{f}$ ce prolongement.
3. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à sa courbe représentative.
4. Montrer que $\widetilde{f}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Déterminer la position relative de la courbe de $\widetilde{f}$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 7. On reprend un exercice de la feuille de TD sur les séries.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
On a vu que :

- $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n}$. Ainsi la série $\sum\left(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)\right)$ diverge ; comme elle est à termes négatifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On a donc, par sommation téléscopique, $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$; d'où $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
- De même, en posant $v_n=nu_n$, l'étude de la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ montre que $\lim_{n\to+\infty}nu_n=+\infty$.

Ainsi u_n tend vers 0, mais moins vite que $\frac{1}{n}$ (car la limite précédente donne $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o(u_n)$).

On va utiliser un argument similaire pour donner un équivalent de u_n. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $w_n=n^\alpha u_n$.

NB : pour simplifier un peu les calculs, on traite $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ **au lieu de** $\ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$**.**

1. Pour $n\geqslant 2$, donner l'expression de $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$.
2. Donner un développement de $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ à l'ordre $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha u_n=\ell\neq 0$ ssi $\alpha=\frac{1}{2}$.

   On a donc montré que : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ell}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8. (Étude d'une suite implicite)
Toutes les relations de comparaison dans cet exercice s'entendent pour $n \to +\infty$.

1. On reprend une suite implicite rencontrée dans la feuille d'exercices sur les suites : u_n est l'unique solution de l'équation $nx = e^{-x}$. On a donc par définition $u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ $(*)$.

   On a vu que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$; ceci permet d'écrire
   $$u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   On souhaite maintenant être plus précis. On note alors $u_n = \dfrac{1}{n} + v_n$, avec $v_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (a) En injectant cette égalité dans la formule $(*)$, montrer que
   $$\frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
   (b) En déduire que $v_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$.

   Grâce aux développements limités, nous sommes donc passés de $u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ à $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. **(Plus technique)** On continue : on pose maintenant $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + w_n$, avec $w_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   En réinjectant cette relation dans la formule $(*)$, montrer que $w_n \sim \dfrac{3}{2n^3}$.

   On peut itérer cette méthode pour obtenir un développement de plus en plus précis de u_n ; mais il faut pour cela un DL d'exp à un ordre supérieur à 2.

Indications

1 Réponses :
En $+\infty$:

- x^3 (plus grande puissance)
- x^4 (idem)
- e^{2x} (faire le quotient et conclure par croiss. comp. basique)
- xe^x (idem)
- e^{3x} (idem)
- $\ln(x)$
- $x^{3/2}$ (par faiblesse du ln devant les puissances ; mais le montrer par quotient)
- $\dfrac{2}{x^5}$ (croissance comp., à montrer par quotient)
- $\dfrac{2}{x}$ (reconnaître $\ln(1+h), h \to 0$;
- $-2\ln(x)$ (le contenu su ln équivaut à x^{-2} mais ça ne prouve rien ; faire le quotient)

En 0 :

- $-x$ (plus petite puissance)
- $-\dfrac{1}{x^2}$ (idem)
- 1 (limite réelle non nulle)
- xe^x (car $xe^x \sim x$ et $x^4 = o(x)$; mais faire le quotient)
- 1 (limite réelle non nulle)
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (faire le quotient et reconnaître une croiss comp) ;
- $x\ln(x)$ (idem)
- $\dfrac{2}{x^5}$ (un terme infini, un terme fini – mais faire le quotient)
- $-\ln(x)$ (couper le ln en 2 pour conjecturer et faire le quotient)
- $-3\ln(x)$ (idem)

2

- $e^{2x} - 2\ln(1+x) = 1 + 3x^2 + o(x^2)$.
- $f(x) = e^{2x}(1+x)^{-1/2} = 1 + 3x/2 + 11x^2/8 + o(x^2)$.
  Le terme en $a + bx$ donne la tangente, et le terme suivant du DL la position relative avec cette tangente.
- $g(x) = 1 - \dfrac{3}{2}(x^2) + o(x^2)$.
- $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$
- $\exp(x\ln(1-x)) = 1 - x^2 + o(x^2)$.

3

- $e^{\sqrt{1+x}} = e(1 + x/2 + o(x^2))$.
  Attention ici on ne peut pas conclure sur la position relative !
- $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)} = 1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)$.
- $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + o(x^2)$.

4

1. Avec $x = 1+h$, $\sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{3+3h+h^2} = \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{24} + o(h^2)\right)$ donc $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to 1}{=} \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{24}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)\right)$.
   Équation de la tangente : $y = \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{1}{2}(x-1)\right)$; écart $\sim \dfrac{\sqrt{3}}{24}(x-1)^2 \geqslant 0$ donc la courbe est au-dessus.
2. $$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
   $$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
3. $$\sqrt{1+x^2}\,e^{1/x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,e^{1/x} = x + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

5

- Passer au même dénominateur.
  $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$

- Le numérateur équivaut à $-x^2$. On trouve $\dfrac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^4-x^3} \to -\infty$.
- L'expression à développer vaut $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} + x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$; on trouve le développement $-\dfrac{3}{2x}+o(1/x)$ (attention à la précision, en $1/x$ seulement).
- Variable dans la puissance donc mise sous forme exponentielle. $\to \ln(2)$.
- $\underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n}$.
- Il faut pousser les DL en $1/n^4$, car au final la multiplication par n^2 donne un $o(1/n^2)$ nécessaire à la discussion). Tous les termes du développement s'annulent, SAUF LE $o(1/n^2)$. Et on peut donc conclure sur la limite de la suite et la nature de la série.

6

1. Tableau de signes sur la quantité dans le ln.
2. Étudier la limite en 0 ; elle est usuelle.
3. Taux de variation ; il n'y a pas d'autre méthode !!
   Ici, par rapport à la limite précédente, il faut pousser le DL un cran plus loin.
   On trouve $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.
4. Il s'agit surtout de montrer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
   $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$ et le numérateur se développe en $x^2/2+o(x^2)$.
5. Ce nouveau terme permet de pousser le DL de f un cran plus loin : $f(x) = x/2+x^2/24+o(x^2)$. Le nouveau terme est l'écart entre $f(x)$ et la tangente $x/2$: on connaît son signe au voisinage de 0.

7

1. On simplifie des factorielles à tour de bras.
   On peut décomposer le calcul en
   - $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$
   - donc $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{-\alpha}\dfrac{2n-1}{2n}$
   - donc $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right) = -\alpha\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)$
2. Pas de souci conceptuel : $1/n\to 0$ donc on peut développer en puissances de $1/n$.
   On trouve : $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right) = \left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. Question pas très directe mais on est en TD :)
   Si $\alpha=\dfrac{1}{2}$, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ converge. Avec des arguments téléscopiques, donc $\ln(w_N)$ admet une limite finie a pour $N\to+\infty$; enfin $w_N = e^{\ln(w_N)} \to e^a = \ell > 0$.

   Par contre si $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ diverge.
   Le terme général de la série est de signe constant (au moins à partir d'un certain rang, information que nous fournit l'équivalent) ; la série diverge ; donc les sommes partielles tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par les mêmes calculs on en déduit que $\ln(w_N)\to-\infty$ (donc $w_N\to 0$) si $\alpha<\dfrac{1}{2}$, et $\ln(w_N)\to+\infty$ (donc $w_N\to+\infty$) si $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

8

1. (a) On a $u_n = \dfrac{1}{n}\exp(u_n)$ et $u_n = \dfrac{1}{n}+v_n$: $\dfrac{1}{n}+v_n = \dfrac{1}{n}\exp\left(-\underbrace{\left(\dfrac{1}{n}+v_n\right)}_{\to 0}\right)$ et on développe l'exponentielle. Réfléchir à l'ordre de grandeur du $o\left(\dfrac{1}{n}+v_n\right)$.
   (b) Développer et simplifier.
2. On part cette fois de $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+w_n = \dfrac{1}{n}\exp\left(-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+w_n\right)\right)$.
   Ne pas oublier que $w_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\dfrac{w_n}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ ce qui permet d'absorber beaucoup de termes sous-dominants dans les $o(\ldots)$.
   À la fin on trouve $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n^3}$.