Comparaison de fonctions
Développements limités

1 Comparaison des fonctions

On étend dans ce chapitre la notion de comparaison (o, $\sim$) aux fonctions. Les définitions, règles de calcul et résultats seront similaires à ceux des suites ; la différence majeure sera que **les résultats de comparaison dépendront du point où on examine le comportement**. Dans le cas des suites, on ne s'intéressait qu'à une limite ($n \to +\infty$) ; ici il faudra examiner le cas de limites $x \to a$, pour tout a réel ou infini.
En pratique, on se limitera en fait aux comportements en 0 et $+\infty$; les autres cas s'y ramèneront.

1.1 Vocabulaire : voisinage

Dans la suite on considérera souvent un « nombre » a qui est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
On dit que :

- f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ ssi elle est définie sur un intervalle I tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I.
- f est définie au voisinage de $+\infty$ ssi elle est définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}, +\infty[$
- f est définie au voisinage de $-\infty$ ssi elle est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \mathrm{B}]$.

Ainsi, la fonction ln est définie au voisinage de 0 (bien qu'elle ne le soit pas en 0) car elle est définie sur $]0, +\infty[$.

Essentiellement, si f est définie au voisinage de a, la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a un sens (car le x peut à la fois tendre vers a et rester dans le domaine de définition de f).

1.2 Comparaisons

Les définitions et propriétés sont identiques au cas des suites. Il faudra par contre préciser le point (fini ou infini) au voisinage duquel on se place.

Dans ce qui suit a est réel, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$.

Définition 1 (Négligeabilité)**.** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie sur I telle que :*

- $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \varepsilon(x) g(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

On a en fait le critère plus intuitif suivant (et en pratique, celui qu'on utilisera) :

Proposition 1 (et, en pratique, **Définition**)**.**
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$. La référence à a est ici primordiale : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dépend évidemment de a !

Ainsi, on ne notera « $f(x) = o\big(g(x)\big)$ » **que si on rappelle clairement au préalable qu'on écrit des relations de comparaison au voisinage de a.**

On définit aussi la relation d'équivalence :

Définition 2 (Équivalence)**.** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I.*
On dit que f et g sont équivalentes en a si et seulement si il existe une fonction α définie sur I telle que :

- $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \alpha(x) g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$

Et on a ici aussi le critère suivant :

Proposition 2 (et, en pratique, **Définition**)**.**
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Méthode :

Pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$, on montrera souvent que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on montrera souvent que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(mais on aura parfois des moyens détournés ; cf. règles de calcul plus loin)

Remarque 1. Comme pour les suites :
Les relations de comparaison et les limites mentionnées étant toutes au voisinage du même point a :

- On a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ si et seulement si : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$.
- Les constantes ne sont pas importantes dans la relation de négligeabilité : si $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$,
$$f(x) = o\big(\alpha g(x)\big) \Leftrightarrow f(x) = o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \beta f(x) = o\big(g(x)\big)$$
- Toute fonction négligeable devant une fonction tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ tend vers 0.

1.3 Échelles de comparaison

Les fonctions intervenant dans les échelles de comparaison sont toujours les mêmes : exponentielles, puissances de x (donc polynômes et fractions rationnelles), logarithmes.

Mais comme on l'a déjà rappelé, la « hiérarchie » entre fonctions obtenue dépend de l'endroit auquel on se place. On vérifie par exemple que $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$; alors que $x \underset{x\to +\infty}{=} o\big(x^2\big)$.

Nous aurons donc deux échelles de comparaison : au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Remarque 2. On pourrait chercher des échelles de comparaison au voisinage de tout $a \in \mathbb{R}$. C'est en fait inutile :

- pour examiner une limite $x \to a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$ (ou $x = a + h$) et on est ramené à la limite $h \to 0$.
- pour examiner une limite $x \to -\infty$, on pose $y = -x$ et on est ramené à la limite $y \to +\infty$.

On se dispensera donc d'apprendre des relations de comparaison en des points différents de 0 et $+\infty$.

1.3.1 Comparaisons au voisinage de $+\infty$

Les relations suivantes se déduisent des formules de croissances comparées.
Ces relations de comparaison sont identiques à celles vues sur les suites (pour lesquelles la variable n tend vers $+\infty$).

- $\alpha < \beta \;\Rightarrow\; x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$
- $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\; \ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$
- $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\; x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$.
- Au voisinage de $\pm\infty$, une fonction polynômiale est équivalente à son terme de plus haut degré.
- Ce résultat s'étend ici aussi toute somme de puissances quelconques de x (c'est une conséquence du premier point) : par exemple,

$$2x\sqrt{x} + x + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2x^{3/2} + x + x^{-1/2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^{3/2}$$

Exemple 1.

$$x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3) \qquad x^{51} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^x\right) \qquad \ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x}) \qquad x^3 - 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$$

En prenant les inverses, on en déduit des comparaisons entre fonctions de limite nulle en $+\infty$:

- $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \dfrac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$
- $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\; e^{-\beta x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.
- $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\; \dfrac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(x)^\alpha}\right)$

Exemple 2.

$$e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right) \qquad \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.3.2 Comparaisons au voisinage de 0

On obtient de nouvelles relations de comparaison dans le cas d'une variable tendant vers 0. On remarquera notamment que certaines relations de comparaison s'inversent ; mais pas toutes !
Ne pas croire que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$, on aura $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(f(x)\big)$.

- $\forall\,(m,n)\in\mathbb{R}^2,\ n>m \ \Rightarrow\ x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^m)$.
- Au voisinage de 0, une fonction polynômiale est équivalente à son terme **de plus bas degré**.
- Ce résultat s'étend en fait à toute somme de puissances quelconques de x : par exemple,

$$x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=x^3+x^{-1/2}-x^{-1} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$$

- $\forall\,(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ (NB : ces deux fonctions étant de limite infinie en 0).
- Au voisinage de 0, on a les équivalents classiques suivants (formules similaires au cas des suites) :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha-1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\text{pour } \alpha\neq 0)$$

Exemple 3. Au voisinage de 0 :

$$x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x) \qquad x^2 \underset{x\to 0}{=} o\big(\sqrt{x}\big) \qquad \ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad x^3-2x \underset{x\to 0}{\sim} -2x$$

Exercice 1. Donner des équivalents des fonctions suivantes au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$:

$$f(x)=\sqrt{x}+x^2 \qquad g(x)=x+\ln(x) \qquad h(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \qquad k(x)=e^x+1+x$$

1.4 Compatibilité avec les opérations

On écrit ici toutes les relations de comparaison au voisinage d'un même point a ; toutes les fonctions mentionnées sont définies sur un intervalle I tel que $a \in \mathrm{I}$ ou a est une extrémité de I ; et ces fonctions ne s'annulent pas sur I, sauf éventuellement en a.

Toutes les règles qui suivent sont identiques à celles énoncées dans le cours sur la comparaison de suites.

- $\big(f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))\big) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$ (transitivité).
- $\big(f(x) = o(h(x))$ et $g(x) = o(h(x))\big) \Rightarrow f(x) + g(x) = o(h(x))$ (compatibilité avec +)
- $\big(f(x) = o(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)\big) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$.
- $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x)h(x) = o(g(x)h(x))$.
- $\big(f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(k(x))\big) \Rightarrow f(x)h(x) = o(g(x)k(x))$
- $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x)h(x) \sim g(x)h(x)$
- $\big(f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)\big) \Rightarrow f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$ (on peut multiplier des équivalents)
- $\big(f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)\big) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{k(x)}$ (on peut faire le quotient d'équivalents)
- $f(x) \sim g(x) \Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z},\ f(x)^k \sim g(x)^k$ (on peut élever les équivalents à une puissance **fixe**)
- si f et g sont positives au voisinage de a, $f(x) \sim g(x) \Rightarrow \sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$ (on peut prendre la racine carrée d'équivalents)

On ne peut toujours pas :

- additionner ou soustraire des équivalents.
- appliquer des fonctions arbitraires à des équivalents :

  Si $f(x) \sim g(x)$, on n'a pas forcément $\varphi(f(x)) \sim \varphi(g(x))$.

  Notamment, les équivalents ne passent ni à l'exponentielle, ni au logarithme :

  $$f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \quad \text{et} \quad f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$$

- passer un équivalent à une puissance *non fixe* : par exemple si $f(x) \sim g(x)$, on n'a pas forcément $f(x)^x \sim g(x)^x$.

Pour comparer des fonctions, on peut comparer leurs équivalents (qui, si on se débrouille bien, auront une forme plus simple) :

Toutes les relations de comparaison sont au voisinage d'un même point a, fini ou infini.

Supposons : $f(x) \sim h(x)$ et $g(x) \sim k(x)$. Alors :

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow h(x) \sim k(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow h(x) = o(k(x))$$

1.5 Composition des relations de comparaison

Le résultat suivant s'énonce de manière un peu abstraite, mais c'est en fait assez intuitif quand on regarde ça sur un exemple, et c'est d'usage très fréquent :

Proposition 3. *Soient a et b deux nombres réels ou infinis, f et g définies au voisinage de a, et φ définie au voisinage de b. Si on suppose :*

- $f(y) \underset{y \to a}{=} o\big(g(y)\big)$ *; et*
- $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = a$.

Alors $f\big(\varphi(x)\big) \underset{x \to b}{=} o\big(g(\varphi(x))\big)$. On a le même résultat avec les relations $\underset{y \to a}{\sim}$ et $\underset{x \to b}{\sim}$.

Par exemple :

- $\ln(1+y) \underset{y \to 0}{\sim} y$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$;

donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ (on peut considérer qu'on a posé $y = \dfrac{1}{x^2}$).
Nous reverrons des manipulations de ce type sur les développements limités.

2 Développements limités

Le développement limité d'une fonction en un point permet de connaître le comportement local d'une fonction : en premier lieu son équivalent, puis les « termes suivants » qui permettent d'affiner cette approximation. Cette connaissance précise au voisinage d'un point permettra notamment d'examiner des positions relatives, de calculer des limites, ou encore d'examiner la convergence de séries ou d'intégrales.

2.1 Premier exemple : approximation affine

Si f est une fonction continue en x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, et on peut donc écrire (si $f(x_0) \neq 0$) :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x_0)$$

On peut ensuite chercher à estimer *l'écart entre $f(x)$ et $f(x_0)$*. La dérivation nous aide ici. Si f est dérivable en x_0, on a, par définition

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{ou encore} \quad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Cette dernière égalité donne $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h} = 0$; ou encore $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) \underset{h\to 0}{=} o(h)$; ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

On obtient ainsi :

Proposition 4. *Soit f une fonction dérivable en x_0. On a :*

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

Cette écriture est appelée approximation affine de f au voisinage de x_0.

On a ainsi obtenu *une nouvelle information* : l'écart entre $f(x_0+h)$ et $f(x_0)$ est équivalent à $hf'(x_0)$ (ou est une quantité négligeable devant h si $f'(x_0) = 0$).

Remarque 3. Si on choisit la variable $x = x_0 + h$, on a alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \underbrace{f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)}_{\mathcal{T}(x)} + o\big((x-x_0)\big)$. On reconnaît dans $\mathcal{T}(x)$ l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0. Autrement dit, l'approximation affine consiste à « approximer une fonction par sa tangente » .

On a en fait ici une équivalence :

Proposition 5. *Soit f définie sur un intervalle I, et $x_0 \in$ I.*
f est dérivable en x_0 si et seulement si on peut écrire

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + ah + o(h)$$

Dans ce cas, $f'(x_0) = a$.

Démonstration. Le sens direct a été étudié ci-dessus.
Supposons maintenant $f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + ah + o(h)$; pour examiner la dérivabilité en x_0 on étudie le taux de variation :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)+ah+o(h)-f(x_0)}{h} = \frac{ah+o(h)}{h} = a + o(1)$$

Pour $h \to 0$ cette dernière expression fournit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\big(a+o(1)\big) = a$$

On obtient bien que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$. □

NB : ce théorème est hors-programme. La démonstration devra être reproduite en cas de besoin ; nous verrons cela en exercice.

2.2 Développements limités ; formule de Taylor-Young

La notion de développement limité est une généralisation du résultat précédent.

Définition 3. *Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (abréviation :* DL_1 *en x_0) si l'on peut écrire :*
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$$
avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- *On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 en x_0 (abréviation :* DL_2 *en x_0) si l'on peut écrire :*
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Les fonctions $x \mapsto a + b(x - x_0)$ et $x \mapsto a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$ sont appelées parties principales *de ces développements limités.*

Remarque 4.

- S'il existe, un DL est unique. Cela permet dans une certaine mesure d'identifier des coefficients : si on a trouvé, par divers moyens, que
$$f(x) = -x + o(x^2) \quad \text{et} \quad f(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$$
on peut déduire que $a = -1$ et $b = 0$.

- Comme, au voisinage de x_0, on a $(x - x_0)^2 \underset{x \to x_0}{=} o(x - x_0)$, on voit qu'une fonction admettant un DL_2 en un point admet aussi un DL_1 en ce même point, obtenu en tronquant la partie principale.

- Si f est définie en x_0, f est dérivable en x_0 ssi elle admet un DL_1 en x_0 (vu plus haut : c'est l'approximation affine)[1].

- En posant $h = x - x_0$, on peut se ramener à des développements au voisinage de 0 : les DL deviennent donc $f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a + bh + o(h)$ et $f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a + bh + ch^2 + o(h^2)$.
Comme les formules donnant les DL usuels s'écrivent pour des variables tendant vers 0, cette manipulation sera systématique pour examiner tout comportement en $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

- On peut en fait définir, selon le même motif, un développement limité à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque. Le programme de Maths Appliquées se limite à $n = 2$.

Méthode :

Pour obtenir un équivalent en 0, on peut utiliser un développement limité.
On utilise pour cela le résultat suivant : l'équivalent d'un DL est le premier terme non nul de celui-ci.
(en rangeant de manière usuelle les termes par puissances croissantes)

Par exemple : si $f(x) \underset{x \to 0}{=} 3x - x^2 + o\big(x^2\big)$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 3x$.

Remarque 5. Énorme avantage : on peut sommer des développements limités !!
Dans une recherche d'équivalent où on ressent le besoin d'ajouter des équivalents (pas bien !), on pourra utiliser des DL, qu'on peut additionner (bien !) ; puis on en déduira l'équivalent recherché à l'aide de la remarque précédente.

[1]Attention ce n'est plus vrai à l'ordre 2 : si f admet un DL_2 en 0, on ne peut pas affirmer qu'elle est deux fois dérivable en 0.

La formule de Taylor-Young donne un résultat d'existence de DL_2 :

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I, et $x_0 \in \mathrm{I}$. On a :*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big)$$

ou, de manière équivalente, pour $h \to 0$:

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o\big(h^2\big)$$

En appliquant ce dernier résultat à des fonctions particulières, on obtient alors les développements limités d'ordre 2 usuels :

Théorème 7. *Au voisinage de 0, on a :*

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$
- $\forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o\big(x^2\big)$

  En particulier :
  - *Pour* $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\big(x^2\big)$
  - *Pour* $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\big(x^2\big)$
  - *Pour* $\alpha = -\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} + o\big(x^2\big)$

Remarque 6. Formules à connaître PAR CŒUR !

Remarque 7. Ces formules permettent de retrouver les équivalents classiques en 0. Les DLs donnent en fait *plus d'information* que les équivalents.

On remarque aussi que le développement limité en 0 d'une fonction polynômiale s'obtient en tronquant son expression à l'ordre désiré : par exemple, si $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + o(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 2x^2 + o\big(x^2\big)$$

2.3 Calcul pratique de développements limités

Première chose à faire : si on étudie la fonction autour de $a \in \mathbb{R}^*$, poser $h = x - a$ pour se ramener à une variable tendant vers 0.

Pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction, on peut utiliser la formule de Taylor-Young, en calculant les dérivée et dérivée seconde. Si la fonction est un peu compliquée, cela devient vite fastidieux, surtout si on veut aller à l'ordre 2.

Une meilleure stratégie est d'additionner, multiplier et diviser les développements limités des différents termes composant la fonction. Ces opérations fonctionnent comme les opérations usuelles ; il faut juste savoir gérer l'ordre du développement.

Pour cela on utilisera des résultats déjà vus, tels que (en comparant au voisinage de 0) :

- Si m et n sont deux entiers, $x^m \times o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- Si $f(x) \sim x^m$, alors $o(f(x)) = o(x^m)$.
- Si $m > n$, tout $o(x^m)$ est aussi $o(x^n)$; mais la réciproque est fausse.
  Par exemple, si $f(x) = 3x + o(x^3)$, on a aussi $f(x) = 3x + o\big(x^2\big)$.
  Par contre, si $f(x) = 3x - x^3$, on peut écrire $f(x) = 3x + o\big(x^2\big)$ mais pas $f(x) = 3x + o(x^3)$.

Exemple 4. Donner les $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (1+x)e^x \qquad g(x) = \ln(1+x+x^2)$$

2.4 Application aux études de fonction

Le développement limité d'une fonction est unique. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 (x_0 compris) : si par divers moyens, on a montré que, pour $h \to 0$, $f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + o(h^2)$, on en déduit que :

- f est continue en x_0 et $f(x_0) = a$;
- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = b$.
  Les deux premiers termes du développement limité donnent alors l'équation de la tangente en x_0.
- Le terme en h^2 peut donner la position relative, au voisinage de x_0, de la courbe de f et de sa tangente.
  Si $c > 0$, $\mathscr{C}_f$ sera au-dessus de la tangente ; si $c < 0$ elle sera en-dessous. Si $c = 0$ on ne peut pas conclure.

Exemple 5. À l'aide d'un développement limité, retrouver l'équation de la tangente en $x = 0$ à $f(x) = \sqrt{2+x}$, et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à celle-ci.

Ceci permettra aussi d'examiner ces propriétés pour des fonctions qui ne sont pas définies en x_0 (mais seulement au voisinage) :

Méthode : étude de prolongements

Soit f définie au voisinage de x_0 mais pas en x_0 ; on suppose que $f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + o(h^2)$. Alors :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = a$; donc on peut prolonger f par continuité en a_0 en **posant** $f(x_0) = a$;
- avec ce prolongement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{bh + ch^2 + o(h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} b + ch + o(h) = b$$

  donc le prolongement effectué est dérivable en a_0, et $f'(x_0) = b$.

NB : ces deux calculs seront à refaire sur une copie, ils ne peuvent pas être utilisés sans démonstration. Nous ferons ça en exercice.

2.5 Application aux études de suites et de séries

Les DL en 0 donnent le comportement d'une fonction dont la variable tend vers 0. On peut s'en servir pour examiner des limites $n \to +\infty$: on procède comme dans la section 1.5, en remplaçant la variable tendant vers 0 par une suite de limite nulle. Ainsi, comme $\dfrac{1}{n} \to 0$, on peut écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{1}{n^2}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

développements qui peuvent ensuite s'additionner / multiplier / etc. pour obtenir limites ou équivalents ; ou encore nature de séries.
Par exemple :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{2n}\right)-1-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) &= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}\geqslant 0\end{aligned}$$

et par comparaison de SATP, on déduit que la série de terme général $\exp\left(\frac{1}{2n}\right)-1-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ converge.