

Programme de colle n°13 Semaine du 19/01 Relations de comparaison sur les fonctions

Pour cette colle, les exercices étoilés du TD9 sont exigibles.

Relations de comparaison

Comparaison de fonctions

- Relations o et \sim au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (fonctions définies sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a), de $\pm\infty$.
- En pratique, on utilisera la caractérisation $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ pour g ne s'annulant pas au voisinage de a , sauf éventuellement en a ; de même $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Comparaisons usuelles au voisinage de 0, de $+\infty$ (croissances comparées : exponentielles vs. puissances vs. logarithmes).
- Équivalents classiques en 0 : $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$.
Équivalent d'une fonction polynômiale en 0, en $\pm\infty$.
Pratique de la composition : par ex, si $f(x) \rightarrow 0$ alors $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$.
- Application : calcul de limites.

Développements limités

Dans le cadre du programme, on se limite aux DL à l'ordre 2.

- Définition : existence d'une écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$.
En pratique $x_0 = 0$; si ce n'est pas le cas on posera $h = x - x_0$ pour se ramener à une variable de limite nulle.
- Cas d'une fonction dérivable en x_0 : l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 ; la partie principale est l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en x_0 ; le terme suivant, s'il existe, donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0 .
- Formule de Taylor-Young pour $f \in \mathcal{C}^2$ en x_0 (démonstration hors programme).
- DLs en 0 à connaître : $\ln(1+x)$, e^x , $(1+x)^\alpha$ (les cas particuliers : $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ doivent être connus directement).
- Addition, multiplication de DLs. Composition (DL de $f(\varphi(x))$, avec $\varphi(x) \rightarrow 0$).
« Gestion de la précision » : si $m \leq n$, $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$; un $o(x^n)$ « absorbe » tous les termes en x^k et $o(x^k)$ pour $k > n$.
Pas de discussion théorique à ce propos ; il faut juste savoir faire des calculs cohérents, éviter d'écrire des termes qui s'avéreront inutiles... on évitera des calculs trop techniques.
- Exemples de développements asymptotiques : développement en $\pm\infty$ en puissances de $\frac{1}{x}$, ou $\frac{1}{n}$.
Application : nature de séries numériques.
NB : les asymptotes obliques ne sont plus au programme.