

Dn 3bis
Corrigé

①

Ex 1

$$\text{1a. } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } X^t X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{et } {}^t X X &= (1 \quad -2 \quad 3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = \underline{\underline{14}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On observe que $\text{rg}(A) = 1$ (3 colonnes liées et $A \neq 0$)

1b. En simplifiant de la q. précédente:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{le coeff } (i,j) \text{ de la matrice} \\ A \text{ est } x_i x_j \end{array} \right.$$

$$\text{et } \alpha = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

$a_{i,j} = x_i x_j = a_{j,i}$ donc A est symétrique, donc diagonalisable (2)

1c. En lisant les colonnes de A , notées $C_1 \dots C_n$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ \vdots \\ x_1 x_n \end{pmatrix} = x_1 X ; \text{ et de m } \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = x_i X \right)$$

Si on note $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a, avec $B_e = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = x_i \times x$$

$$\text{et donc } \boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(x)}$$

Pour $\text{Ker}(f)$, il existe une notion d'orthogonalité qui est HP en math appli, donc pas d'autre choix que de travailler ds les composants:

~~$(u_1, \dots, u_n) \in \text{Ker}(f)$~~

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \times \sum_{j=1}^n u_j x_j = 0.$$

* si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, clairement $A = (0)$ et $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$
 $f = \tilde{0}$

(3)

* Sinon: $\exists i$ tq $x_i \neq 0$

et alors $\boxed{(u_1, \dots, u_n) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n u_j x_j = 0}$

ce qui est la forme la plus utilisable de $\text{Ker}(f)$

la dimension suit par thm du rang:

* si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $f = \tilde{0}$ et $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^n = n$

* si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\underbrace{x}_{\neq 0})$ est de dimension 1, donc

par théorème du rang $\boxed{\dim \text{Ker}(f) = n-1}$

Ad. le plus simple est de reprendre:

$\forall i \in [1, n]$, $f(e_i) = x_i \times x$.

Alors: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ($\pm$ par défaut de la base canonique!)

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ (linéarité)

$= \sum_{i=1}^n x_i (x_i \times x)$

$= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times x$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \alpha x}$

Ad. * Si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = (0)$ et il y a une vap (0) et ④
un sp $(M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tout entier!})$

* Sinon $\text{rg}(A) = 1$ et $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } f = n-1$

donc $\lambda = 0$ est vap et son SEP associé est $\text{Ker}(A)$
avec $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid \sum x_i u_i = 0 \right\}$ (de dim $n-1$ comme vu ci-dessus)

et $f(x) = \alpha x$ avec $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0$

donc α est ~~vap~~ une autre vap de A , et $\text{Vect}(X) \subset E_\alpha(A)$

Avec $\sum_{\lambda} \dim E_{\lambda}(A) \leq n$ et $\dim \text{Ker}(A) = n-1$ on a

forcément $\dim E_{\alpha}(A) = 1$; donc

$\alpha \in \text{Sp}(A)$ et $E_{\alpha}(A) = \text{Vect}(X)$

De plus, $\dim E_0(A) + \dim E_{\alpha}(A) = n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$: il n'y a pas d'autre
vap!

2. a.

(5)

$$\text{rg}(V) = \text{rg}(V_1, \dots, V_p) = p \quad \text{car } (V_1, \dots, V_p) \text{ est libre}$$

$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ donc le H. rg s'écrit.

$$\dim \mathbb{R}^p = \dim \text{Ker}(g) + \text{rg}(g)$$

$$p = \dim \text{Ker}(g) + \underbrace{\text{rg}(V)}_{=p} \quad (\text{car } V = \text{Mat}(g))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(g)) = 0 \quad \text{donc } \boxed{\text{Ker}(g) = \{0\}}$$

2b. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (déjà vu)

Or les x_i^2 étant ≥ 0 : $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \forall i, x_i = 0$.

donc $\boxed{{}^tXX = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}, x_i = 0}$ CQFD

2c. * si $VY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a évidemment ${}^tVVY = {}^tV \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* Réciproque, si ${}^tVVY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
 alors en multipliant par tY : ${}^tY {}^tVVY = {}^tY \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
 ligne $\nearrow$

d'où $t_Y^t V V Y = 0$ colonne

Par $t_Y^t V V Y = t(VY) \overline{VY} = 0$

ce qui implique d'après 2b que $VY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Adm: $\boxed{VY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t_V V Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$

2d. On étudie l'inversibilité via le noyau:

NB: $V \in \mathcal{M}_{n,p}$ $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \int_n^p$
 $\Rightarrow t_V \in \mathcal{M}_{p,n}$ $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \int_p^n$
 $\Rightarrow \boxed{t_V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

$Y \in \ker t_V \Leftrightarrow t_V V Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow VY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après 2c

$\Leftrightarrow Y \in \ker(V)$

$\Leftrightarrow \underline{y \in \ker(g)}$, où y est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ de coord. Y dans $\mathcal{B}_e$

On

On $\ker(g) = \{0\}$ (2a): on en déduit $Y = 0$ puis

$\ker(t_V V) = \{0\}$

ce qui montre que $\boxed{t_V V \text{ est inversible}}$

NB : vous avez noté que la défⁿ de matrices stochastiques donnée dans ce sujet n'est pas celle du cours : ici chaque colonne est de somme 1. Ceci correspond à une formalisation des chaînes de Markov où on range la loi de proba ds 1 colonne ; où $V_{n+1} = M V_n$; et où la réduitⁿ se fait sur la matrice M et non sa transposée.

J'ai laissé le sujet tel quel car je me suis dit que c'était un exercice intéressant de retrouver un background connu dans un énoncé, mais dont le traitement demande une adaptation des outils du cours...

$$\begin{array}{l} 1^o) \quad \text{Si } x \geq 0, \quad |x| - x = x - x = 0 \geq 0 \\ \quad \text{Si } x < 0 \quad |x| - x = -x - x = -2x > 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ds les 2 cas, } |x| - x \geq 0. \end{array} \right.$$

2a) Sachez repérer les hypothèses valables "dans cette question uniquement!"

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2$$

$$= \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{v_3^2} + 2|v_1||v_2| + 2|v_1||v_3| + 2|v_2||v_3| - (\cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{v_3^2} + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3)$$

$$= 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3) \quad (*)$$

NB: $|x|^2 = x^2$ si $x \geq 0$ (2)
 $= (-x)^2 = x^2$ si $x < 0$
 $\Rightarrow |x|^2 = x^2$ toujours!

2b. Si (E) est vérifiée

$$|v_1 + v_2 + v_3| = |v_1| + |v_2| + |v_3|$$

donc $(v_1 + v_2 + v_3)^2 = (|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2$ et l'expression précédente $\checkmark$ est nulle.

On elle est constituée uniquement de termes ≥ 0 (q. 1); donc les 3 termes sont nuls.

Ainsi $\forall j \neq j', |v_j \cdot v_{j'}| = v_j \cdot v_{j'}$

Si on suppose $|v_j \cdot v_{j'}| > 0$ on trouve $v_j \cdot v_{j'} > 0$: v_j et $v_{j'}$ sont de même signe.

2c. Tous les termes non nuls de V sont donc de même signe: $\left. \begin{array}{l} \text{si ils sont } H_3 > 0 \text{ on aura } |V| = V \\ \text{sinon } |V| = -V \end{array} \right\}$

3) On généralise le calcul:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |v_i| \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \cancel{v_i^2} + 2 \sum_{i < j} |v_i v_j| - \left(\sum_{i=1}^n \cancel{v_i^2} + 2 \sum_{i < j} v_i v_j \right) \\ &= 2 \sum_{i < j} (|v_i v_j| - v_i v_j) \end{aligned}$$

Avec (E) cette express^o est encore nulle ; à t_{ens} ≥ 0 ;

d'où $\forall i \neq j \quad |v_i v_j| = v_i v_j$

* si $v_i v_j \neq 0$ on a $v_i v_j > 0$ donc v_i et v_j sont de m^{ême} signe

* Pour des i tq $v_i = 0$, il n'y a pas gd chose à rajouter...

T^{ous} les composantes non nulles de V sont donc de m^{ême} signe

→ si elles sont t^{ous} > 0 , $|V| = V$

→ _____ < 0 , $|V| = -V$

Partie II

h. Il s'agit de montrer : $\forall (i,j) \in [1, N]^2$, $G_{i,j} > 0$.

$$G_{i,j} = p A(i,j) + \frac{1-p}{N} \quad \text{où } A(i,j) = 0 \text{ ou } \frac{1}{d_j} \text{ suivant les cas.}$$

* Si il n'y a pas de liens sortant de la page j , $A_{i,j} = 0$

d'où $G_{i,j} = \frac{1-p}{N} > 0$ ($p \in [0, 1[$)

et $A_{j,j} = 1$ d'où $G_{j,j} = p + \frac{1-p}{N} = \frac{1+(N-1)p}{N} > 0$

* si il y a d_j liens sortant de la page j , $G_{i,j}$

... en fait c'est + simple :

$A(i,j)$ est toujours ≥ 0 ;

$p \in [0,1]$ donc $1-p > 0$

$$\Rightarrow G(i,j) = \underbrace{p A(i,j)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1-p}{N}}_{> 0} > 0 \quad \text{pour tous } i,j \quad \text{ce qui montre la structure } > 0 \text{ de } \underline{\underline{G_{i,j}}}$$

$$5. \text{ Si } d_j = 0, \text{ alors } A(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \Rightarrow \sum_i A(i,j) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \sum_{i=1}^N G(i,j) &= \sum_{i=1}^N \left(p A(i,j) + \frac{1-p}{N} \right) \\ &= p \sum_{i=1}^N A(i,j) + 1-p \\ &= p + 1-p = \underline{\underline{1}}. \end{aligned}$$

$$6. \text{ Si } d_j > 0 \quad * \text{ si } j \text{ pointe vers } i, A(i,j) = \frac{1}{d_j}$$

et il y a d_j "i" dans ce cas.

$$* \text{ si } j \text{ ne pointe pas vers } i, A(i,j) = 0$$

et il y a $N - d_j$ "i" dans ce cas.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N G(i,j) = \sum_{i=1}^N \frac{1-p}{N} + \sum_{j \rightarrow i} \underbrace{p A(i,j)}_{= \frac{1}{d_j}} + \sum_{j \nrightarrow i} \underbrace{p A(i,j)}_{= 0} = 1-p + p \times d_j \times \frac{1}{d_j} = \underline{\underline{1}}$$

il y a d_j termes

7) On a ainsi montré que G est stochastique

(5)

8. Soit $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

Par produit matriciel:

$$(GP)_i = \sum_{j=1}^N G(i,j) p_j = p_i \text{ d'après (5) ce qui montre}$$

que $GP = P$

P est invariant par G

B. Modèle du surfur sur le Web.

↳ c'est la partie "chaîne de Markov" pure et dure, ai on étudier les résultats qui sont maintenant explicité du programme...

9. Un vecteur de probabilité est tel que:

$$\forall i \in [1, N] \text{ , } N_i \geq 0 \text{ , et } \sum_{i=1}^n |v_i| = 1.$$

$$(\text{donc } \sum_{i=1}^n v_i = 1)$$

$$\text{Ici } X_n(\omega) \in [1, N] \text{ donc } \sum_{i=1}^N \underbrace{P(X_n=i)}_{\geq 0} = 1$$

V_n est bien un vecteur de probabilité

10. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$: si $P(X_{n-1}=j) \neq 0$ alors:

$$\begin{aligned} P((X_n=i) \cap (X_{n-1}=j)) &= P_{(X_{n-1}=j)}(X_n=i) \times P(X_{n-1}=j) \\ &= \underline{G(j, i) (v_{n-1})_j} \end{aligned}$$

si $P(X_{n-1}=j)=0$ alors $P((X_n=i) \cap (X_{n-1}=j))=0$ aussi ; et donc l'égalité précédente reste vraie

11. Par probabilités sur le SCE $((X_{n-1}=j))_{1 \leq j \leq N}$:

$$P(X_n=i) = \sum_{j=1}^N P((X_n=i) \cap (X_{n-1}=j))$$

$$(v_n)_i = \sum_{j=1}^N G(j, i) (v_{n-1})_j$$

On reconnaît la formule du produit matriciel: ceci montre bien que

$$\boxed{V_n = G V_{n-1}}$$

12. Récurrence quasi-immédiate (mais à faire! même rapidement)

• $G^0 = I_N$ donc $V_0 = I_N V_0 = G^0 V_0$

• $V_n = G^n V_0 \Rightarrow V_{n+1} = G V_n = G^{n+1} V_0$.

(7)

13. $0 < q < 1$; $0 < q' < 1$

En notant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $QV = V \Leftrightarrow \begin{cases} (1-q)v_1 + q'v_2 = v_1 \\ qv_1 + (1-q')v_2 = v_2 \end{cases}$

$$(\Rightarrow) q'v_2 = qv_1$$

$$(\Rightarrow) v_2 = \frac{q}{q'} v_1 \quad (q' \neq 0).$$

On en déduit : $QV = V \Leftrightarrow V \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ q/q' \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix} \right)}}$.

14. On cherche donc V_∞ :

* invariant par Q , donc $\in \text{Vect} \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$

* vecteur de probabilité ; donc à composantes ≥ 0 et de somme 1

On voit que l'unique sol^o est $\alpha \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ avec $\alpha(q' + q) = 1$

$$\text{donc } \boxed{V_\infty = \begin{pmatrix} \frac{q'}{q+q'} \\ \frac{q}{q+q'} \end{pmatrix}}$$

NB: c'est vrai pour $n=0! \dots$ et $P(0)$ se vérifie bien + facile que $P(1)$.

15. On étudie cela par récurrence sur $n \in (\mathbb{N}^*)$, sans difficulté théorique notable :

$$* \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \dots = Q$$

* Si on multiplie l'express^o de Q^n (donnée par $P(n)$) par Q , on trouve la = express^o au rang $n+1$: donc on aura l'hérédité.

16. $0 < q < 1$
 $0 < q' < 1$

donc $-1 < 1 - q - q' < 1 \Rightarrow (1 - q - q')^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

on en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$: les 2 colonnes de cette matrice sont bel et bien égales à V_∞ .

EXERCICE

17. $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par formule du produit matriciel: $({}^tQU)_i = \sum_{j=1}^N ({}^tQ)_{i,j} u_j \stackrel{!}{=} 1$
 $= \sum_{j=1}^N Q_{j,i} = 1$ car on a supprimé Q stochastique.
 $({}^tQU)_i = u_i$

Ainsi, par égalité de tous les composants: $\boxed{{}^tQU = U}$

18. J'en avais déjà parlé: $\Pi \text{ inv} \Leftrightarrow {}^t\Pi \text{ inv}$ (et d'ailleurs $({}^t\Pi)^{-1} = {}^t(\Pi^{-1})$)
 (c'est du connu!)

donc: $Q - I_n \text{ inv.} \Leftrightarrow {}^t(Q - I_n) \text{ inv.}$

$\Leftrightarrow {}^tQ - {}^tI_n \text{ inv.}$ (linéarité de la transposée)

$\boxed{Q - I_n \text{ inv} \Leftrightarrow {}^tQ - I_n \text{ inv}}$

19. $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tQU = U$, donc est rep de tQ (9)

par la valeur propre 1: on a donc $1 \in \mathcal{S}_p({}^tQ)$

donc: ${}^tQ - I_n$ non inv

donc $Q - I_n$ non chr (q. 18)

donc $\boxed{1 \in \mathcal{S}_p(Q)}$

20. Il s'agit d'établir que $\forall i$ les composés de $Q|V| - |V|$ sont positifs.

$$\begin{aligned} (Q|V| - |V|)_i &= (Q|V|)_i - |v_i| \\ &= \sum_{j=1}^N Q_{i,j} |v_j| - |v_i| \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Or } QV = \lambda V \Rightarrow \sum_{j=1}^N Q_{i,j} v_j = \lambda v_i \quad (\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket)$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^N Q_{i,j} v_j \right| = \underbrace{|\lambda|}_{=1} |v_i|$$

$$\text{et par inég. tri. : } |v_i| = \left| \sum_{j=1}^N Q_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^N \underbrace{Q_{i,j}}_{\geq 0} |v_j|$$

En comparant avec l'express^o ~~de~~ (*), on a montré:

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, (Q|V| - |V|)_i \geq 0 \quad : \boxed{Q|V| - |V| \text{ est pos.}}$$

21. Sommes donc !

(10)

$$\sum_{i=1}^N (Q|V| - |V|)_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N Q_{i,j} |v_j| - |v_i| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q_{i,j} |v_j| - \sum_{i=1}^N |v_i|$$

(on écrit
 $\sum_i \sum_j = \sum_j \sum_i$
 et on voit $|v_j|$,
 indep de i , de
 la $\sum_i$)

$$= \sum_{j=1}^N |v_j| \left(\sum_{i=1}^N Q_{i,j} \right) - \sum_{i=1}^N |v_i|$$

$\sum_i Q_{i,j} = 1$ par
 propriété
 stochastique

$$= \sum_{j=1}^N |v_j| - \sum_{i=1}^N |v_i| = 0$$

Les composants de $Q|V| - |V|$ sont donc tous positifs, et de somme nulle:
 elles sont donc toutes nulles!

d'où $Q|V| - |V| = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $Q|V| = |V|$:

$|V|$ est invariant par Q

22 On a vu (q. 19) que $1 \in \text{Sp}(Q)$: il existe $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $QV = V$

Avec la q. 21 (si $d=1$ on a bien $|d|=1$!) on a donc $Q|V| = |V|$

$|V|$ est invariant par Q , non nul, à composantes ≥ 0 .

(11)

$$\text{Posons alors } W = \frac{1}{\underbrace{\sum_{i=1}^n |v_i|}_{=S}} |V|$$

($\sum_{i=1}^n |v_i| > 0$ car tous les termes de cette somme sont ≥ 0 , et au moins un est > 0)

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n |v_i| = \frac{1}{S} \times S = 1.$$

$$W \text{ vérifie donc : } \begin{cases} QW = W \\ w_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

donc est un vecteur de probabilité invariant par Q

Théorème Cette fois, $\forall i, j, Q_{ij} \geq 0$

$$23. \text{ Si } QV = V, \text{ on a } \forall i \in [1, N], \sum_{j=1}^N Q_{ij} v_j = v_i.$$

Supposons $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \exists i_0 \in [1, N], v_{i_0} > 0$ (car on a pas V positif!)

$$\text{Dans ce cas : } \forall i \in [1, N], v_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} v_j$$

$$= \underbrace{Q_{i, i_0} v_{i_0}}_{> 0} + \sum_{j \neq i_0} \underbrace{Q_{ij} v_j}_{\geq 0} > 0$$

On a bien : $\forall i, v_i > 0 : V$ est strictement positif.

On a donc bien montré: $V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $V \text{ str.} > 0.$

(12)

24. On a supposé que V_∞ est un vecteur de probabilité, invariant par Q .

V est donc positif donc d'après 23°) V est nul ou str. positif.

V étant non nul car c'est un vecteur de probabilité ($\sum v_i = 1$), on a donc bien:

$$\boxed{V_\infty \text{ est strictement positif.}}$$

25. V_∞ et W_∞ sont invariants par Q , donc

$$\begin{aligned} Q(W_\infty - \alpha V_\infty) &= QW_\infty - \alpha QV_\infty \\ &= W_\infty - \alpha V_\infty \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{W_\infty - \alpha V_\infty \text{ est invariant par } Q}$$

26. $\alpha = \frac{(W_\infty)_{i_0}}{(V_\infty)_{i_0}}$ donc la composante i_0 de $W_\infty - \alpha V_\infty$ est:

$$(W_\infty - \alpha V_\infty)_{i_0} = (W_\infty)_{i_0} - \alpha (V_\infty)_{i_0} = 0$$

$\therefore V$ n'est pas strictement positif
(car $\exists$ une composante nulle).

Par contre

(13)

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

$$v_i = (w_\infty)_i - \alpha (v_\infty)_i$$

$$\text{Par def. } t^\circ \text{ de } \alpha: \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \alpha \leq \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \quad \Big) \quad \underline{\underline{\alpha (v_\infty)_i \geq 0}}$$

$$(w_\infty)_i - \alpha (v_\infty)_i \geq 0$$

donc ts les v_i sont positifs: V est positif.

27. D'après la q. 23, V est positif et invariant par Q , il est soit > 0 (mais ~~est~~ exclu d'après 26), soit nul.

$$\text{Ainsi: } V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{w_\infty = \alpha v_\infty}$$

28. De plus w_∞ et v_∞ sont deux vecteurs de probabilité.

$$\text{On a } \sum_{i=1}^N (w_\infty)_i = 1 = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^N (v_\infty)_i}_{=1} \quad \text{d'où } \underline{\underline{\alpha = 1}} \quad \text{et } \boxed{w_\infty = v_\infty}$$

Il y a bien unicité des vecteurs de probabilité
invariant par Q

29. Le système (S) se résout

(16)

$GP = P$ où G est la "matrice de Google" strictement
positive (q. 4) et stochastique (q. 7)

et P est un vecteur de probabilités ($p_i \geq 0$; et $\sum p_i = 1$)

D'après 28, il existe un unique P vérifiant cela :

Le système (S) admet bien une unique solution.

30. P étant sol^o de $GP = P$:

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, N], p_i &= \sum_{j=1}^N G_{ij} p_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\overset{\geq 0}{a_{ij}} \overset{\geq 0}{p_j} + \frac{1-p}{N} p_j \right) \geq \sum_{j=1}^N \frac{1-p}{N} p_j \end{aligned}$$

$$\text{d'où } p_i \geq \frac{1-p}{N} \sum_{j=1}^N p_j$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i \geq \frac{1-p}{N}}$$

31. Si $p=1$, $G_{i,j} = A_{i,j}$. Supposons qu'Internet soit constitué de
 $N=3$ pages reliées par aucun lien : Alors $G_{i,j} = I_3$ avec la déf^o de
 A , et tout ~~est~~ vecteur de probabilité est invariant !!
(c'est eux qui ont demandé de simplifier à l'extrême ! ("))

Ici on va montrer que le vecteur P invariant par la matrice G donne bien une quantité pouvant s'identifier à la chance d'être sur telle ou telle page Web.

III A

32. Ici Q stochastique, strictement > 0 .

Par définition de $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned} \|QV\|_1 &= \sum_{i=1}^N |(QV)_i| = \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N Q_{i,j} v_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Q_{i,j} v_j| \quad \text{inég. tri.} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \underbrace{|Q_{i,j}|}_{\geq 0} |v_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |v_j| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N Q_{i,j} \right)}_{=1} \quad (Q \text{ stochastique}) \\ \boxed{\|QV\|_1 &\leq \sum_{j=1}^N |v_j| = \|V\|_1} \end{aligned}$$

S. V est positif, toutes les quantités en jeu sont positives et un calcul similaire donne $\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^N \underbrace{(QV)_i}_{\geq 0} = \dots = \sum_{j=1}^N \underbrace{v_j}_{\geq 0} = \|V\|_1$.

33. Si $\lambda \in \mathbb{S}_p(\mathbb{Q})$, soit $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ un vep

(16)

associé :

$$\text{on a } QV = \lambda V$$

et donc l'inégalité de 32. donne

$$\|\lambda V\|_1 \leq \|V\|_1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N |\lambda v_i| \leq \sum_{i=1}^N |v_i|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \sum_{i=1}^N |v_i| \leq \sum_{i=1}^N |v_i|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda| \leq 1} \text{ en divisant par } \sum_{i=1}^N |v_i| > 0 \text{ (car } V \text{ non nul)}$$

34. V étant vep de Q pour la vep λ , on a

$$QV = \lambda V$$

d'où avec la formule du produit matriciel, et en regardant uniquement la première composante :

$$\sum_{j=1}^N Q(1,j) v_j = \lambda v_1$$

et en prenant la valeur absolue :

$$\textcircled{1} \quad \left| \sum_{j=1}^N Q(1,j) v_j \right| = |\lambda| |v_1| = |v_1| \text{ car on a supposé } |\lambda| = 1.$$

Pan ailleurs, $|V| = V_\infty$, qui est invariant par Q

(ie: $Q V_\infty = V_\infty$):

donc $Q|V| = |V|$

ce qui donne cette fois $\sum_{j=1}^N Q(1,j) |v_j| = |v_1|$ (toujours en s'intéressant à la 1^{ère} composante)

②

En égalant ① et ②: $\left| \sum_{j=1}^N Q(1,j) v_j \right| = \sum_{j=1}^N Q(1,j) |v_j|$

38. La question 3 (on démontre la l'inégalité triangulaire) affirme que $\left| \sum_{i=1}^n v_i \right| = \sum_{i=1}^n |v_i|$ si et si les v_i sont de m même signe.

Avec Q à coeff positifs, on a obtenu

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(1,j) v_j \right| = \sum_{j=1}^N |Q(1,j) v_j|$$

et donc tous les $Q(1,j) v_j$ sont de m même signe
 $\stackrel{\geq 0}{\equiv} \Delta$ (≥ 0 ne suffisant pas!)

donc tous les v_j sont de m même signe.

ce qui se traduit par $|V| = V$ ou $|V| = -V$

Dans tous les cas on a bien V cohérent à $|V|$

On $|V| = V_0 \in E_1(Q)$

donc V , colinéaire à $|V|$, appartient à ce $m^{\text{ème}}$ SEP

— V est rep de Q par $\boxed{d=1}$.

36) Par définition, l'hypothèse " Q diagonalisable" assure l'existence de D diag. et S inv. tq $Q = SDS^{-1}$

Une récurrence déjà vue permet de conclure à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^n = SD^n S^{-1}$$

37. Les n coeff diagonaux de D sont les vap. de Q .

D'après 33: $\forall d \in Sp(Q), |d| \leq 1$, donc les coeff diag de D sont dans $[-1, 1]$.

D'après 35: si $d \in Sp(Q)$ vérifie $|d| = 1$, alors $d = 1$;

et dans ce cas tout vap associé à 1 est colinéaire

à V_0 dont on a montré l'existence et l'unicité en partie IIC.

Ainsi $\underline{E_1(Q) = \text{Vect}(V_0)}$ est de dimension 1; et donc

$d=1$ apparaît une seule fois sur la diagonale de D .

Final^{ment}, la diagonale de D est constituée d'un "1", et d'autres coeff $(d_i)_{2 \leq i \leq N}$ tq $|d_i| < 1$

38. $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & d_2^n & \\ (0) & & \ddots \\ & & & d_n^n \end{pmatrix}$

(19)

(NB: on peut choisir D, S

tg le "1" soit en pos^o (1,1))

avec $|d_i| < 1$ pour $i \geq 2$; d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (0) \\ (0) & \backslash & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

puis (mais, là l'énormé aurait dû préciser que limite du produit = produit des limites valant pour les matrices) :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S D^n S^{-1} = S \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & (0) \\ (0) & \backslash & \\ & & 0 \end{pmatrix} \times S^{-1} \right)$$

qu'on note Q_∞ .

39. Montrons que le produit de 2 matrices stochastiques est stochastique (rappel: ds ce sujet, stoch. $\Leftrightarrow$ les colonnes sat de $\Sigma = 1$)

Soient A et B stochastiques. On a :

$$\forall j \in [1, N], \sum_{i=1}^N A(i, j) = \sum_{i=1}^N B(i, j)$$

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^N (AB)_{i,j} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A(i, k) B(k, j)$$

on intervertit

$$= \sum_{k=1}^N \left(B(k, j) \underbrace{\sum_{i=1}^N A(i, k)}_{=1} \right) = \sum_{k=1}^N B(k, j) = \underline{\underline{1}}$$

De plus, si A et B positifs, les coeff de AB :

$$(AB)_{ij} = \sum A(i,k) B(k,j) \text{ sont aussi positifs.}$$

Ainsi : (A, B) Stochastiques $\Rightarrow AB$ stochastique.

Une récurrence immédiate donne alors : Q stochastique $\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, Q^n \text{ stochastique.}}$

Enfin, on passe à la limite.

$$* \text{ Si } \forall n \in \mathbb{N}^*, (Q^n)_{ij} \geq 0, \text{ alors } (Q_\infty)_{ij} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Q^n)_{ij} \geq 0$$

$$* \text{ Si } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N (Q^n)_{ij} = 1, \text{ alors } \forall j \in \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N (Q_\infty)_{ij} = 1$$

et $\boxed{Q_\infty \text{ est donc stochastique}}$

40. On remarque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q \times Q^n = Q^{n+1} \otimes$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = Q_\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^{n+1} = Q_\infty$$

d'où en passant à la limite ds $\otimes$: $\boxed{Q \times Q_\infty = Q_\infty}$

41. Soit $j \in \overline{1, N}$: $((Q_\infty)_{i,j})$ est la j -ième colonne de Q_∞

$$Q \times Q_\infty = Q_\infty \text{ s'écrit : } \forall (i,j) \in \overline{1, N}^2, \sum_{k=1}^N Q(i,k) Q_\infty(k,j) = (Q_\infty)_{i,j}$$

ce qui, si C_j est la j -ième colonne de Q_∞ , s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^N Q(i,k) (C_{ij})_k = (C_{ij})_i$$

et donc $QC_j = C_j$: Toutes les colonnes de Q_∞ sont invariantes par Q

42. Q étant stochastique, strictement positive, on va ~~chercher~~ chercher le résultat d'unicité de la partie IIC.

Q_∞ étant stochastique, chacune de ses colonnes est à coefficients positifs : ce sont des "vecteurs de probabilité", selon la terminologie de l'énergie.

On a l'unique vecteur de probabilité invariant par Q est V_∞ : on a donc bien montré que

$$\boxed{\text{Toutes les colonnes de } Q_\infty \text{ sont égales à } V_\infty}$$

43. On récapitule :

* la matrice G de Google est stochastique, strictement positive (partie IA)

* Si V_n est le vecteur de probabilité contenant la loi de X_n , alors ~~on a~~

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = G^n V_0$$

d'où, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n = G_\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = G_\infty V_0$.

où $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$ est positif avec $\sum \alpha_i = 1$;

(22)

et G_∞ a toutes ses colonnes égales à l'unique vecteur de proba invariant par G .

Or celui-ci est le vecteur de composantes $p(j)$ tels que définies par le système (S) (cf Partie I § ; l'invariance est prouvée en quest° 8 et l'unicité résulte de IIC)

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = G_\infty V_0$

$$\text{où } G_\infty = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} P & P & P & \dots & P \end{array} \right) \text{ et } V_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$ "colonne PageRank"

$$\text{En effectuant le produit: } G_\infty V_0 = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) P = \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = N) \end{pmatrix}$$

On a bien la cr en loi de (X_n) vers X_∞ tq
 $\forall i \in [1, N], P(X_\infty = i) = p(i)$

kk. Si X_n est la site sur lequel se trouve le surfer

La Construct° de la matrice

La partie IB nous a fait admettre que la matrice G est bien celle qui encode le déplacement du surfen sur Internet, d'un site à l'autre.

Ds lors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n modélise la loi de probabilité du numéro du site Web sur lequel se trouve le surfen au tps n ;

et $P(X_\infty = i)$ est la proba, après un très grand nombre de clics, de se retrouver sur le site i .

Ceci permet bien de faire l'interprétation du Page Rank en termes de "proba de se trouver sur un site"

(au bout d'un gd nb d'étapes pour "gommer" le mémoire de l'état initial).

NB : pourquoi cette expression pour $G(i,j)$?

Elle encode en fait 2 phénomènes :

- * l'utilisateur change de page en suivant un lien
- * _____ "au hasard" (en rallumant son ordi par ex)

On peut représenter cela par le diagramme suivant :

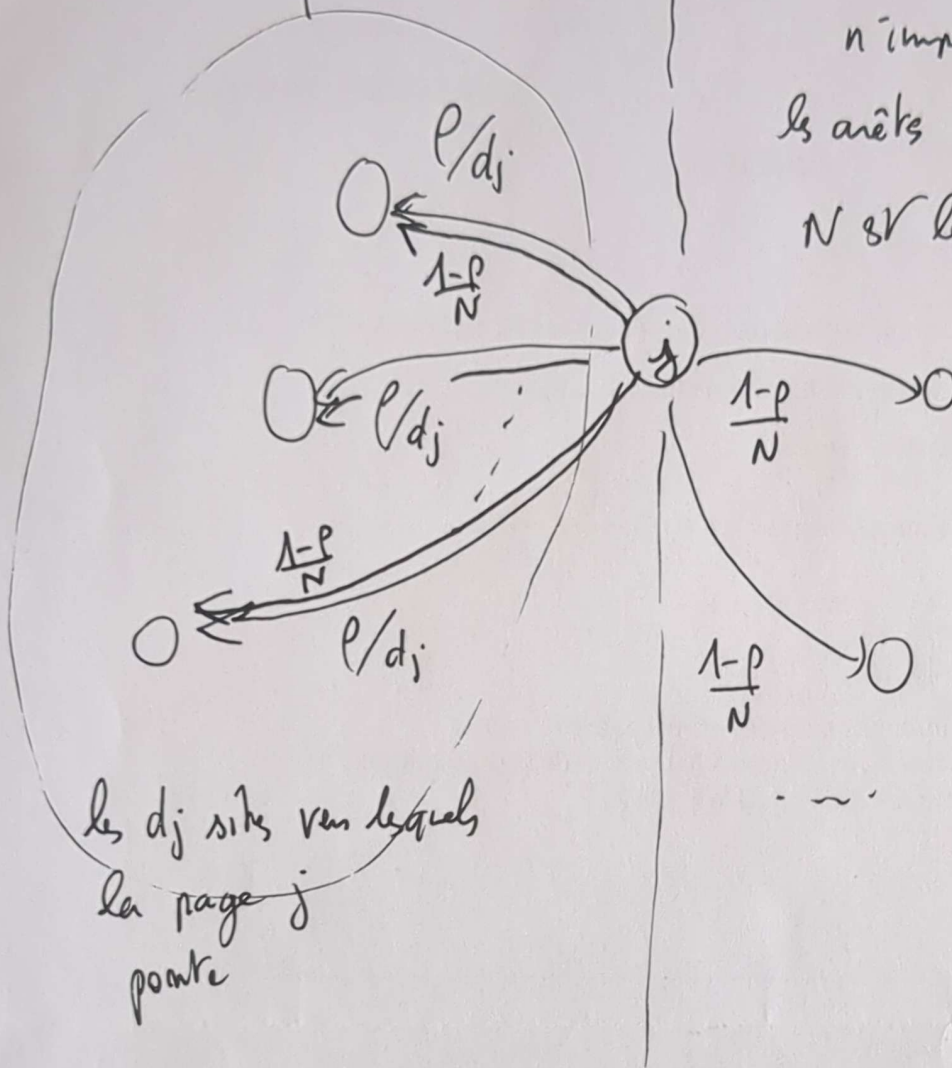
Prob p d'aller ici

Prob $1-p$ d'aller

n'importe où : ainsi

les arêtes sont de poids $\frac{1-p}{N}$ où N est le nb de sites

(2h)



les d_j sites vers lesquels
la page j
pointe

d'où $P(j \rightarrow \text{site relié à } j) = \frac{p}{d_j} + \frac{1-p}{N}$

$P(j \rightarrow \text{site non relié à } j) = \frac{1-p}{N}$