Intégration

Exercices de révision

Rappel : tableau des primitives usuelles

NB : ce tableau sera précisé dans le cours ; ici c'est plus un aide-mémoire.
(temporaire, ensuite vous le connaîtrez par cœur, bien entendu !!)

Primitives des fonctions élémentaires :

Fonction	Primitive
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$
$x^\alpha \quad (\alpha \text{ non entier})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{ax} \quad \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$

Formes usuelles de fonctions composées :

Fonction	Primitive
$u'(x).\left(u(x)\right)^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{\left(u(x)\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x).e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

1 Échauffement

Techniques de calcul

Exercice 1. Calculer par recherche directe de primitive les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \left(t^3-2t^2\right)\mathrm{d}t \qquad \int_0^{1/2} e^{-2x}\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1}{3u+1}\mathrm{d}u \qquad \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^3+1}\mathrm{d}t \qquad \int_1^2 \frac{3}{x^5}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^4}\mathrm{d}x \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \text{ (voir indication)}$$

Indication : On cherchera des réels a, b tels que, pour tout $x \notin \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

Exercice 2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 x^2\,e^x\mathrm{d}x$$

Exercice 3. Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x \quad \left(\text{poser } u = 2x+1\right) \qquad\qquad \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}}\mathrm{d}x \quad \left(\text{poser } u = \ln(x)\right)$$

Fonctions dépendant d'intégrales

Exercice 4.
Soit G la fonction définie par :

$$\mathrm{G}(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Donner l'ensemble de définition de G. Montrer que G est impaire.
2. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de G ; étudier les variations de G.
4. Soit $x \geqslant 0$. Encadrer (simplement !) e^{-t^2} pour $t \in [x, 2x]$. En déduire un encadrement de $\mathrm{G}(x)$ sur $\mathbb{R}_+$; puis un encadrement de $\mathrm{G}(x)$ sur $\mathbb{R}_-$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x)$.

Suites d'intégrales, majorations, limites

Exercice 5. Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. En majorant la fonction intégrée, montrer que (I_n) converge vers 0.
3. Montrer que $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.
4. On pose $u_k = (-1)^k \mathrm{I}_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1})$.
5. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ converge, et que sa somme vaut $\ln(2)$.

2 Pour les enthousiastes

Techniques de calcul

Exercice 6. Calculer par recherche directe de primitive les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x \ \text{(voir indication)} \qquad \int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 5^x\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^5 \left|x^2-5x+6\right|\mathrm{d}x \qquad \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$$

Indication : chercher des réels c, d, e tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2+3x+1}{x+1} = cx+d+\dfrac{e}{x+1}$).

Exercice 7. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 t^3\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\text{intégrer } t \mapsto te^{-t^2})$$

Exercice 8. Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \frac{1}{t+2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \left(\text{poser } u=\sqrt{t}\right) \qquad \int_e^{e^2} \frac{1}{u\ln(u)}\,\mathrm{d}u \quad \left(\text{poser } t=\ln(u)\right)$$

Exercice 9. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, et son signe.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant x\sqrt{1+x^4}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que : $\forall\, t \geqslant 0,\ t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.
5. En déduire un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$, puis un équivalent de f en $+\infty$.
6. En remarquant : $\forall\, t \geqslant 0,\ \sqrt{1+t^4} \geqslant 1$, obtenir une minoration de f. En déduire un équivalent de f en 0^+.

Exercice 10. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.
2. Montrer, avec une intégration par parties, que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}$.
3. En déduire : $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Indications

1

2

3

4

5

1. Primitive usuelle.
2. Garder la dépendance en n pour envisager un théorème d'encadrement. Pas besoin d'être très subtil ensuite.
3. Regrouper la somme par linéarité.
4. Dans $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ remplacer $\frac{1}{k+1}$ par ce qui a été trouvé à la question précédente.
5. On a ses sommes partielles... qui ont une forme qui devrait vous sauter aux yeux. Ne reste plus qu'à passer à la limite.

6

-
- Soit je suis trop fatigué soit je me suis trompé dans l'énoncé car ça a pas l'air facile...
  On peut écrire
  $$\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x+1)+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)$$
  et sous cette dernière forme ça se passe bien... en observant que $x-2$ est négatif sur l'intervalle d'intégration.
- $\exp(x\ln(5))$
- Étudier le signe de x^2-5x+6 sur l'intervalle d'intégration. Puis couper l'intégrale pour n'intégrer que sur les intervalle où le signe de x^2-5x+6 est constant.
  Remarque : **In n'existe aucune formule donnant une primitive d'une expression comportant une valeur absolue.**
-

7

8

9

1. Il s'agit donc de trouver les x tels que $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ soit bien définie. Pas d'intégrale impropre ici : il suffit que la fonction à intégrer soit continue sur l'intervalle d'intégration.
2. Il y aura un changement de variable $u = -t$
3. On minore la fonction à intégrer à l'aide d'une monotonie. Vérifier que les bornes sont dans le bon sens pour intégrer l'inégalité !
   Pour la limite en $-\infty$ on peut utiliser la question précédente.
4. Justifier : $t^4 \leqslant 1+t^4 \leqslant (1+t^2)^2$
5. Intégrer l'encadrement ... on trouve $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7x^3}{3}$.
6. Intégrer cette fois $1 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$. on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

10

1. Dans la majoration, conserver le $\frac{1}{n!}$ et s'efforcer d'éjecter le reste pour obtenir une intégrale calculable.
2. Il faut passer de I_n à I_{n+1} donc augmenter la puissance du polynôme : on passera outre les recommandations officielles de mise en œuvre d'une IPP.
3. $\frac{1}{k!} = \mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k$. Devinez ensuite comment on calcule la somme ! (et le faire proprement)