ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Programme de colle n°14
Semaine du 26/01

Relations de comparaison sur les fonctions
Intégration sur un segment (révisions d'ECG1)
Intégrales impropres (début)

Pour cette colle, les exercices étoilés du TD9 sont exigibles.

Relations de comparaison

Comparaison de fonctions

- Relations o et $\sim$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (fonctions définies sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a), de $\pm\infty$.
- En pratique, on utilisera la caractérisation $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ pour g ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a ; de même $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Comparaisons usuelles au voisinage de 0, de $+\infty$ (croissances comparées : exponentielles vs. puissances vs. logarithmes).
- Équivalents classiques en 0 : $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$.
  Équivalent d'une fonction polynômiale en 0, en $\pm\infty$.
  Pratique de la composition : par ex, si $f(x) \to 0$ alors $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$.
- Application : calcul de limites.

Développements limités

Dans le cadre du programme, on se limite aux DL à l'ordre 2.

- Définition : existence d'une écriture $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big)$.
  En pratique $x_0 = 0$; si ce n'est pas le cas on posera $h = x - x_0$ pour se ramener à une variable de limite nulle.
- Cas d'une fonction dérivable en x_0 : l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 ; la partie principale est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 ; le terme suivant, s'il existe, donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.
- Formule de Taylor-Young pour f $\mathscr{C}^2$ en x_0 (démo hors programme).
- DLs en 0 à connaître : $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ (les cas particuliers : $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ doivent être connus directement).
- Addition, multiplication de DLs. Composition (DL de $f\big(\varphi(x)\big)$, avec $\varphi(x) \to 0$).
  « Gestion de la précision » : si $m \leqslant n$, $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$; un $o(x^n)$ « absorbe » tous les termes en x^k et $o(x^k)$ pour $k > n$.
  Pas de discussion théorique à ce propos ; il faut juste savoir faire des calculs cohérents, éviter d'écrire des termes qui s'avéreront inutiles... on évitera des calculs trop techniques.
- Exemples de développements asymptotiques : développement en $\pm\infty$ en puissances de $\frac{1}{x}$, ou $\frac{1}{n}$.
  Application : nature de séries numériques.
  NB : les asymptotes obliques ne sont plus au programme.

Intégration sur un segment d'une fonction continue (rappels de 1ère année)

- Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie lorsque que f est continue sur $[a,b]$; alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f.
- Propriétés usuelles : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Méthodes de calcul :
  - Recherche de primitives « à vue » en reconnaissant des formes usuelles. Le tableau à connaître est le suivant :

Fonction	Primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{ax+b} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$e^{ax} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$u'(x).\big(u(x)\big)^\alpha,\ \alpha\neq -1$	$\dfrac{\big(u(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x).e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

  - Intégration par parties (les fonctions en jeu sont $\mathscr{C}^1$)
  - Changement de variable : la formule n'est pas à connaître mais il faut savoir le faire en pratique. Tout changement non évident devra faire l'objet d'indications.
- Étude de suites d'intégrales : notamment, majorations et encadrements par croissance de l'intégrale.
- Étude d'une fonction des bornes de l'intégrale (notamment : dérivation).

Intégrales impropres

Attention : seules les bornes impropres $\pm\infty$ sont au programme.

Le programme qui suit est pour la colle de vendredi ; pour lundi et mardi on se limitera à des calculs d'intégrale impropre (une seule borne infinie) qui se font en calculant l'intégrale sur un segment et en passant à la limite $\mathrm{A}\to\pm\infty$.

On se place dans le cas d'une fonction continue sur $]-\infty,a]$ ou $[a,+\infty[$ avec $a\in\mathbb{R}$.

- Définition : soit f continue sur $[a,+\infty[$; on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Définition similaire pour $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Si f est continue sur $\mathbb{R}$; on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent (où $a\in\mathbb{R}$ est quelconque).

- **NB :** la notion d'intégrabilité n'est pas au programme.
- Convergence / divergence d'intégrales par calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$; valeur de l'intégrale dans le cas convergent.
  NB : pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on effectue donc deux calculs de limite séparés.
- Convergence absolue d'une intégrale. Elle implique la convergence.
- **Calcul d'intégrales impropres.**
  Dans la plupart des cas on introduira une borne A finie, et on passera à la limite à la fin du calcul.
  Les IPP ne sont autorisées que pour les intégrales sur un segment.
  Les changements de variable aussi, sauf dans le cas d'un changement de variable affine où on peut procéder directement sur une intégrale impropre (application typique : poser $t=-x$ pour exploiter des propriétés de parité)
- **Outils de comparaison**

  Tous ces outils sont valables pour des fonctions *positives* au voisinage de $+\infty$. Les théorèmes sont similaires pour des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^a$.

  - Si $0\leqslant f\leqslant g$ sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Extension au cas où l'inégalité a lieu sur $[c,+\infty[$, avec $c\geqslant a$.
  - Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  - Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

  Dans le cas non positif on peut discuter la convergence de $\int_a^{+\infty}(-f(t))\,\mathrm{d}t$, ou utiliser une convergence absolue.
- **Intégrales de référence**

  - Intégrales de Riemann : $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent ssi $\alpha>1$.
  - Intégrales de $t\mapsto e^{\lambda t}$ en $\pm\infty$.
  - « Test de Riemann » pour la convergence de certaines intégrales impropres par $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t)=0$ ($\alpha>1$). Le raisonnement doit être détaillé.