Programme de colle n°15
Semaine du 2/02

Intégration

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille TD10.2 sont exigibles.

Intégration sur un segment d'une fonction continue (rappels de 1ère année)

- Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie lorsque que f est continue sur $[a,b]$; alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f.
- Propriétés usuelles : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Méthodes de calcul :
  - Recherche de primitives « à vue » en reconnaissant des formes usuelles. Le tableau à connaître est le suivant :

Fonction	Primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\dfrac{1}{ax+b} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}\ln\|ax+b\|$
$e^{ax} \quad \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
$u'(x).\left(u(x)\right)^\alpha,\ \alpha\neq -1$	$\dfrac{\left(u(x)\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$u'(x).e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

  - Intégration par parties (les fonctions en jeu sont $\mathscr{C}^1$)
  - Changement de variable : la formule n'est pas à connaître mais il faut savoir le faire en pratique. Tout changement non évident devra faire l'objet d'indications.
- Étude de suites d'intégrales : notamment, majorations et encadrements par croissance de l'intégrale.
- Étude d'une fonction des bornes de l'intégrale (notamment : dérivation).

Intégration sur un intervalle quelconque

Attention : seules les bornes impropres $\pm\infty$ sont au programme.

On se place dans le cas d'une fonction continue sur $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Définition : soit f continue sur $[a, +\infty[$; on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Définition similaire pour $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent (où $a \in \mathbb{R}$ est quelconque).
- **NB :** la notion d'intégrabilité n'est pas au programme.
- Convergence / divergence d'intégrales par calcul de $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$; valeur de l'intégrale dans le cas convergent.
  NB : pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on effectue donc deux calculs de limite séparés.
- Convergence absolue d'une intégrale. Elle implique la convergence.
- **Calcul d'intégrales impropres.**
  Dans la plupart des cas on introduira une borne A finie, et on passera à la limite à la fin du calcul.
  Les IPP ne sont autorisées que pour les intégrales sur un segment.
  Les changements de variable aussi, sauf dans le cas d'un changement de variable affine où on peut procéder directement sur une intégrale impropre (application typique : poser $t = -x$ pour exploiter des propriétés de parité)
- **Outils de comparaison**

  Tous ces outils sont valables pour des fonctions *positives* au voisinage de $+\infty$. Les théorèmes sont similaires pour des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^a$.

  - Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Extension au cas où l'inégalité a lieu sur $[c, +\infty[$, avec $c \geqslant a$.
  - Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  - Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

  Dans le cas non positif on peut discuter la convergence de $\int_a^{+\infty} (-f(t))\,\mathrm{d}t$, ou utiliser une convergence absolue.

- **Intégrales de référence**

  - Intégrales de Riemann : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent ssi $\alpha > 1$.
  - Intégrales de $t \mapsto e^{\lambda t}$ en $\pm\infty$.
  - « Test de Riemann » pour la convergence de certaines intégrales impropres par $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ ($\alpha > 1$). Le raisonnement doit être détaillé.