

Variables aléatoires à densité

Exercices

Manipulations sur les lois à densité

Exercice 1 (Bestiaire). (*)

Dans tout ce qui suit, on note U une variable suivant $\mathcal{U}([0, 1])$.

1. Soit $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- (a) Montrer que F_1 est la fonction de répartition d'une variable à densité X_1 . Donner une densité de X_1 .
- (b) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$ (on donne : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
- (c) Montrer que $\sqrt{X_1}$ est une variable à densité et reconnaître sa loi.
- (d) Soit $S = \sqrt{-\ln(1-U)}$. Montrer que S suit la même loi que X_1 .
En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_1 .

2. Soit la fonction $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 3t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

- (a) Montrer que f_2 est une densité de probabilité.
- (b) On note X_2 une variable aléatoire de densité f_2 ; donner la fonction de répartition de X_2 , notée F_2 .
- (c) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $V(X_2)$.
- (d) Soit $T = U^{1/3}$. Montrer que T suit la même loi que X_2 .
En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_2 .

3. **(Loi de Gumbel)** Soit X_3 une variable de fonction de répartition $F_3 : x \mapsto 1 - \exp(-e^x)$.

- (a) Vérifier que F_3 possède bien les propriétés d'une fonction de répartition.
- (b) Montrer que X_3 est à densité ; en donner une densité.
- (c) Donner la loi de la variable aléatoire e^{X_3} .
- (d) Soit $V = \ln(-\ln(U))$. Montrer que V suit la même loi que X_3 .
En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_3 .

4. **(Loi de Laplace)** Soit X_4 une variable aléatoire de fonction de répartition $F_4 : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- (a) Montrer que X_4 est à densité ; en donner une densité f_4 .
- (b) Montrer l'existence, puis calculer $\mathbb{E}(X_4)$ et $V(X_4)$ (on pourra examiner la parité de f_4).
- (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $|X_4|$.

5. **(Loi logistique)** Soit $F_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $t \mapsto \frac{1}{1 + e^{-t}}$.

- (a) Montrer que F_5 est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note X_5 une telle variable.
- (b) Montrer que X_5 admet une densité paire. Montrer que X_5 admet une espérance, et la calculer.
- (c) Soit $W = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$. Montrer que W suit la même loi que X_5 .
En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_5 .

6. Soit $f_6 : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x^3} & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

- Montrer que f_6 est une densité de probabilité.
- Soit X_6 une variable aléatoire de densité f_6 . Déterminer sa fonction de répartition.
- Montrer que f_6 est paire.
- Discuter l'existence de $\mathbb{E}(X_6)$ et $V(X_6)$. Les calculer en cas d'existence.
- Déterminer la loi de la variable $(X_6)^2$.

Exercice 2. (*)

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On pose

$$U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- Donner les fonctions de répartition de U et V.
- Montrer que U et V sont des variables aléatoires à densité ; donner une densité pour chacune de ces deux variables.
- Prendre l'exercice en supposant que les X_i suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 3 (Lois de fonctions de X).

Dans les cas suivants, donner la loi de Y, montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

- $X \mapsto \mathcal{U}([0, 1])$, $Y = \sqrt{X}$.
- $X \mapsto \mathcal{U}([-1, 1])$, $Y = X^2$.
- $X \mapsto \mathcal{U}([-1, 1])$, $Y = |X|$.
- $X \mapsto \mathcal{E}(\lambda)$, $Y = \ln(X)$.

Exercice 4 (d'après EML 1996).

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Déterminer le réel $\alpha > 0$ tel que f soit une densité de probabilité. On note alors X une variable aléatoire de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition de X.
- Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- Soit $Y = |X|$. Donner la fonction de répartition de Y ; montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

Exercice 5 (Lois de Pareto).

1. Soit $g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 3 & \text{si } t \geq 1 \\ t^4 & \end{cases}$

- (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité g . Donner l'expression de la fonction de répartition de X .
- (b) Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$; les calculer en cas d'existence.
- (c) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{E}(3)$. Montrer que $\exp(U)$ suit la même loi que X . En déduire, à l'aide de la fonction rd. `exponential`, un script Python permettant de simuler des tirages de X .
- (d) Retrouver l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en calculant $\mathbb{E}(\exp(U))$, où U a été définie dans la question 1c.

2. Soit $c > 0$. On pose

$$g_c : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ c & \text{si } t \geq 1 \\ t^{c+1} & \end{cases}$$

- (a) Montrer qu'ici aussi on a une densité ; déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y de densité g_c .
- (b) Discuter selon la valeur de c l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. Calculer ces quantités en cas d'existence.
- (c) Reprendre les questions (c) et (d) de l'item précédent avec $U \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

3. Soient $(a, c) \in]0, +\infty[^2$ et

$$g_{a,c}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ a^c & \text{si } x \geq a \\ x^{c+1} & \end{cases}$$

Soit Z une variable de densité $g_{a,c}$.

- (a) Montrer que g_c est une densité de la variable aléatoire $\frac{Z}{a}$.
- (b) À l'aide de cette dernière remarque, discuter selon les valeurs de a et c les existences de $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$; et donner leur valeur en cas d'existence.
- (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $aU^{-1/c}$ suit la même loi que Z .
- (d) En déduire une fonction Python `pareto(a, c)` qui prend en arguments deux réels a et c strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Z .

Exercices type concours

Exercice 6 (EDHEC 2021 un peu adapté).

1. (a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ peut être vue comme la fonction de répartition d'une variable Y à densité. Donner une densité de Y .

2. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

On a déterminé dans l'exercice 5 (cas $c = 2$) la fonction de répartition de X ; cette fonction est

$$G : x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X . Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$; on admet que M_n est une variable aléatoire à densité.

- (a) On note G_n la fonction de répartition de M_n . Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x .
- (b) On pose $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

3. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.
- (b) Calculer, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

NB : on dit que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y .*

Exercice 7 (EDHEC 2023). On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Comme dans l'exercice 5 on montre que f est une densité de probabilité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c .

On a vu que F est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
- (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geq 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leq tx)$.
- (b) En déduire que la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X .

On cherche à examiner la réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $] -\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y . Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}(Y > t) > 0$.
 - La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y . On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c .
2. Justifier que $G(1) = 0$.
3. (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geq 1, \forall t > 1, G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

- (b) Justifier que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

- (c) Montrer enfin la relation:

$$\forall t > 1, G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

4. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$. On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$. Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

- (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.
- (b) En notant K la constante évoquée à la question 4a, donner toutes les solutions de (E_1) .
- (c) Trouver une fonction u , constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2) .
- (d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \iff h - u$ est solution de (E_1) .
- (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

5. (a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

(b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y .

Exercice 8. Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, et U suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Autrement dit, $\mathbb{P}(U = -1) = \mathbb{P}(U = 1) = \frac{1}{2}$. On dit que U est une variable de Rademacher.

On définit $Y = UX$.

- 1. En utilisant la fonction `rd.normal`, programmer une fonction Python qui renvoie un tirage de la variable aléatoire Y .
- 2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y \leq x) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X \geq -x))$.
- 3. En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.
- 4. Calculer l'espérance de U ; en déduire que $\mathbb{E}(XY) = 0$.
- 5. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

6. (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$

- 7. (a) Vérifier que $\mathbb{E}(X^2 Y^2) = 3$.
- (b) Déterminer $\text{Cov}(X^2, Y^2)$.
- (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

Exercice 9.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$. On pose

$$Y = [X] + 1 \quad \text{et} \quad Z = X - [X]$$

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Reconnaître la loi de Y , et calculer son espérance.
3. Déterminer $Z(\Omega)$.
4. Soit $t \in [0, 1[$. Montrer : $\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(k+t) - F_X(k))$. En déduire la fonction de répartition de Z ; montrer que Z est à densité, et en donner une densité.

Exercice 10 (EML 2001).

1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t} t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

- (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.

- (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

- (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

$$E(X_n) = n + 1 \quad V(X_n) = n + 1$$

- (b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t) dt \simeq 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t) dt \simeq 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t) dt \simeq 0,90$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4 .

Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leq 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t .

On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t .

- (a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t .

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n , prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , égale à l'instant d'arrivée de la n -ième voiture au péage à partir de l'instant 0.

- (b) Soient $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leq t)$ et de l'événement $(Y_t \geq n)$.

- (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n .

- (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

Exercice 11. Soit p un réel de $]0, 1[$.

La population active d'un pays est découpée en n classes socioprofessionnelles ; on modélise le revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu de la classe i par une variable aléatoire à densité X_i , suivant la loi de Pareto de paramètre i ; dont la fonction de répartition est donnée par (cf. exos précédents) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On définit aussi une variable aléatoire Y , à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, telle que $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, p)$.

On effectue un tirage aléatoire de Y ; puis, si Y a pris la valeur i , on choisit au hasard (équiprobable) un individu de la classe socioprofessionnelle i .

On note Z_n la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros ; on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n .

1. Expliciter $G_n(x)$ pour tout réel x strictement inférieur à 1 .
2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1 .
 - (a) Justifier que pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = F_i(x).$$

- (b) Montrer que :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

- (c) En déduire que :

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}.$$

3. Justifier que Z_n est une variable aléatoire à densité.
4. On suppose qu'on dispose d'une fonction Python `simulX` prenant en argument un entier i et renvoyant un tirage de X_i .
Écrire une fonction en langage Python, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p , et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z_n .
5. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = \frac{1}{n}$.

- (a) Montrer que, pour tout x réel :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la fonction de répartition.

Quelques compléments sur la loi normale

Exercice 12. Soient X_1 et X_2 indépendantes ; on suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Rappeler les densités de X_1 et X_2 .
2. Donner la loi de la variable $X_1 - X_2$.
3. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2)$.

Soit

$$U = \frac{X_1 - X_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Montrer que $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Exprimer l'événement $(X_1 \leq X_2)$ en fonction de U ; en déduire que

$$\mathbb{P}(X_1 \leq X_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

Exercice 13 (Loi log-normale). Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = \exp(X)$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de la fonction Φ .
2. Déterminer une densité de Y .
3. Généraliser les deux questions précédentes à $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$ quelconques.

Exercice 14. Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $X = N + |N|$, et $Y = N|N|$.

1. Déterminer l'espérance de Y .
2. Montrer que Y admet une variance. Calculer $\mathbb{E}(Y^2)$ à l'aide d'une IPP (en intégrant $xe^{-x^2/2}$) ; puis $V(Y)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour $x < 0$.
5. Soit $x > 0$. En utilisant le SCE $\{(N > 0), (N \leq 0)\}$, montrer que

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(0 < N \leq \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

En déduire $\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$, où on a noté Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

6. La variable X est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Indications

- 1.
- 2.
- 3.

4. Le caractère à densité ne pose pas pb (\mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , raccord de continuité en 0). On trouve pour densité $f(x) = \frac{e^x}{2}$ si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ si $x < 0$ (poser à la main $f(0) = 1$ pour avoir une densité continue – réflexe utile).

f_4 est clairement paire ($f_4(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$) ; espérances et variances existent par test de Riemann ou en reconnaissant des intégrales donnant les espérances variances de $\mathcal{E}(1)$.

On trouve $\mathbb{E}(X_4) = 0$ (parité) et $V(X_4) = \mathbb{E}(X_4^2) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{2} dt = 2$.

5. Par méthode usuelle, $|X_4| \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

2

3

4 1. On trouve $\alpha = \ln(2)$ en demandant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ (les autres propriétés sont vérifiées).

2. Avec la méthode standard, on distingue 4 cas pour le calcul. On trouve $F(x) = 0$ si $x \leq -\ln(2)$, $= e^x - \frac{1}{2}$ si $-\ln(2) \leq x \leq 0$, $= \frac{3}{2} - e^{-x}$ si $0 \leq x \leq \ln(2)$, $= 1$ si $x \geq \ln(2)$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t f(t) dt$ donc cv abs, et $\mathbb{E}(X)$ nulle par parité de f .

4. $F_Y(x) = 0$ sur \mathbb{R}_-^* (Y prend des valeurs positives) ; $F_Y(x) = F(x) - F(-x)$ sur \mathbb{R}_+ (fait en TD sur un autre exemple).
Au final on trouve

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1 - e^{-x}) & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } x \geq \ln(2) \end{cases}$$

on vérifie les propriétés voulues pour une variable à densité ; et une densité de Y est

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\}, f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-x} & \text{si } 0 < x < \ln(2) \\ 0 & \text{si } x \geq \ln(2) \end{cases}$$

(en complétant à la main en 0 et $\ln(2)$).

5

6

7 1. (a) $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leq tx) = \frac{\mathbb{P}((t < X) \cap (X \leq tx))}{\mathbb{P}(X > t)}$. La proba au numérateur peut être nulle (événements incompatibles) ou s'exprimer à l'aide de F .

$$\text{Pour } x \geq 1 \text{ on trouve } \mathbb{P}_{(X>t)}(X \leq tx) = \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

(b) Par loi conditionnelle on entend la donnée de $\mathbb{P}_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right)$ pour x réel **quelconque** : ne pas oublier des cas !

NB ici l'énoncé est incorrect : on ne peut pas demander la densité continue sur $[1, +\infty[$ (crochet fermé) et obtenir une Pareto. On peut soit demander continuité sur $]1, +\infty[$ et continuité à droite en 1, ou (de manière équivalente) que la restriction de g à $]1, +\infty[$ soit continue.

2. g nulle sur $] -\infty, 1[$.

3. (a)

(b) $G \in \mathcal{C}^1$ car g continue (cours). On dérive par rapport à ... quelle variable ?

(c) $G' = g$ sur $]1, +\infty[$; donc $g(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$ pour $x > 1$. On fait tendre $x \rightarrow 1^+$ et on utilise les continuités de g (à droite) et G .

4. (a) Établir $z'(t) = ct^{c-1} \left(y(t) + \frac{t}{c} y'(t) \right)$. Comme $ct^{c-1} \neq 0$ sur $]1, +\infty[$, on a

$$(\forall t > 1, z' = 0) \Leftrightarrow (\forall t > 1, y(t) + \frac{t}{c} y'(t))$$

(b) Maintenir les équivalences !! y sol de (E_1) ssi $z = K$ constante ssi $y(t) = \frac{K}{t^c}$: on a bien TOUTES les solutions.

(c) Injecter $y(t) = \alpha$ dans (E_2) . On trouve $\alpha = 1$.

(d) Double implication : maintenir un nombre suffisant de $\forall t > 1$ pour être rigoureux.

(e) Conclusion directe des deux questions précédentes.

5. (a) On a trouvé une infinité de solutions à (E_2) (normal). Si on demande une unicité, il faut imposer une condition initiale. En trouver une vérifiée par G .

(b)

8 1. rd.normal() renvoie un tirage de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ensuite renvoyer X ou $-X$, de manière équiprobable.

2. Probas totales.

3. Voir une propriété de Φ dans le cours.

4. Attention X et Y ne sont pas indépendantes !! Mais reformuler pour utiliser quand même la formule de l'espérance d'un produit de v.a. indépendantes.

5.

6. (a) $E(X^2)$ se trouve avec Konig-H.

Par formule de transfert et parité cette espérance s'exprime aussi à l'aide de $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

(b)

(c)

(d) Similaire à 6a

7. (a) $X^2Y^2 = (X^2)(UY)^2 \dots$ que vaut U^2 ?
(b)
(c) Pour la seconde partie de la question, montrer la contraposée.

9

10

- 11 1. G_n est l'un des X_i ; qui sont tous à valeurs dans $[1, +\infty[$. Donc f rép nulle.
2. (a) Sachant $Y = i$, on a $Z = X_i$.
(b) FPT !
(c) Il y a un binôme de Newton.
3. 2 expressions \mathcal{C}^1 ; raccorder en 1.
4. rd. binomial pour tirer Y , puis on appelle simulX... avec quel argument ??
5. (a) Remplacer p par $\frac{1}{n}$ dans ce qui précède. Ensuite on reconnaît une limite de la forme $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ qui n'a plus aucun secret pour vous.
Il faut montrer que $G : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition : $\rightarrow 0 / \rightarrow 1$; on la trouve continue ; croissante (rappel : utilise la continuité au point de raccord, cf exo 1 je crois).
Si cela est acquis il existe une variable de f rép égale à G . On a bien la cv en loi.

12

- 13 1. Noter que Y est à valeurs > 0 . On trouve

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Montrer d'abord que cette densité existe : la continuité de F en 0 est à détailler. Ensuite on dérive $x \mapsto \Phi(\ln(x))$ sur \mathbb{R}_+^* et on se souvient que $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
3. Calculs similaires ; montrer d'abord que la fonction de répartition de X est $x \mapsto \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

14