Variables aléatoires à densité
Exercices

Manipulations sur les lois à densité

Exercice 1 (Bestiaire). **(*)**
Dans tout ce qui suit, on note U une variable suivant $\mathscr{U}(]0,1[)$.

1. Soit $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

   (a) Montrer que F_1 est la fonction de répartition d'une variable à densité X_1. Donner une densité de X_1.

   (b) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$ (on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

   (c) Montrer que $\sqrt{X_1}$ est une variable à densité et reconnaître sa loi.

   (d) Soit $S = \sqrt{-\ln(1-U)}$. Montrer que S suit la même loi que X_1.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_1.

2. Soit la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 3t^2 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

   (a) Montrer que f_2 est une densité de probabilité.

   (b) On note X_2 une variable aléatoire de densité f_2 ; donner la fonction de répartition de X_2, notée F_2.

   (c) Montrer l'existence, et calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $V(X_2)$.

   (d) Soit $T = U^{1/3}$. Montrer que T suit la même loi que X_2.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_2.

3. **(Loi de Gumbel)** Soit X_3 une variable de fonction de répartition $F_3 : x \mapsto 1-\exp(-e^x)$.

   (a) Vérifier que F_3 possède bien les propriétés d'une fonction de répartition.

   (b) Montrer que X_3 est à densité ; en donner une densité.

   (c) Donner la loi de la variable aléatoire e^{X_3}.

   (d) Soit $V = \ln(-\ln(U))$. Montrer que V suit la même loi que X_3.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_3.

4. **(Loi de Laplace)** Soit X_4 une variable aléatoire de fonction de répartition $F_4 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1-\dfrac{e^{-x}}{2} \text{ si } x>0 \end{cases}$.

   (a) Montrer que X_4 est à densité ; en donner une densité f_4.

   (b) Montrer l'existence, puis calculer $\mathbb{E}(X_4)$ et $V(X_4)$ (on pourra examiner la parité de f_4).

   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $|X_4|$.

5. **(Loi logistique)** Soit $F_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ t \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-t}}$.

   (a) Montrer que F_5 est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note X_5 une telle variable.

   (b) Montrer que X_5 admet une densité paire. Montrer que X_5 admet une espérance, et la calculer.

   (c) Soit $W = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$. Montrer que W suit la même loi que X_5.
   En déduire une fonction Python permettant de simuler des tirages de la variable aléatoire X_5.

6. Soit $f_6 : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

   (a) Montrer que f_6 est une densité de probabilité.

   (b) Soit X_6 une variable aléatoire de densité f_6. Déterminer sa fonction de répartition.

   (c) Montrer que f_6 est paire.

   (d) Discuter l'existence de $\mathbb{E}(X_6)$ et $V(X_6)$. Les calculer en cas d'existence.

   (e) Déterminer la loi de la variable $(X_6)^2$.

Exercice 2. (*)
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$. On pose

$$U = \max\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big) \qquad V = \min\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big)$$

1. Donner les fonctions de répartition de U et V.
2. Montrer que U et V sont des variables aléatoires à densité ; donner une densité pour chacune de ces deux variables.
3. Reprendre l'exercice en supposant que les X_i suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 3 (Lois de fonctions de X)**.**
Dans les cas suivants, donner la loi de Y, montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$, $Y = \sqrt{X}$.
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([-1,1]\big)$, $Y = X^2$.
3. $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([-1,1]\big)$, $Y = |X|$.
4. $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, $Y = \ln(X)$.

Exercice 4 (d'après EML 1996)**.**

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} \text{ si } -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer le réel $\alpha > 0$ tel que f soit une densité de probabilité. On note alors X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Soit $Y = |X|$. Donner la fonction de répartition de Y ; montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

Exercice 5 (Lois de Pareto).

1. Soit $g : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{3}{t^4} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$

   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité g. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

   (b) Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$; les calculer en cas d'existence.

   (c) Soit $U \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$. Montrer que $\exp(U)$ suit la même loi que X. En déduire, à l'aide de la fonction `rd.exponential`, un script Python permettant de simuler des tirages de X.

   (d) Retrouver l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en calculant $\mathbb{E}(\exp(U))$, où U a été définie dans la question 1c.

2. Soit $c > 0$. On pose
$$g_c : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{c}{t^{c+1}} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'ici aussi on a une densité ; déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y de densité g_c.

   (b) Discuter selon la valeur de c l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. Calculer ces quantités en cas d'existence.

   (c) Reprendre les questions (c) et (d) de l'item précédent avec $U \hookrightarrow \mathscr{E}(c)$.

3. Soient $(a, c) \in]0, +\infty[^2$ et
$$g_{a,c}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ c\dfrac{a^c}{x^{c+1}} \text{ si } x \geqslant a \end{cases}$$

   Soit Z une variable de densité $g_{a,c}$.

   (a) Montrer que g_c est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{Z}{a}$.

   (b) À l'aide de cette dernière remarque, discuter selon les valeurs de a et c les existences de $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$; et donner leur valeur en cas d'existence.

   (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $aU^{-1/c}$ suit la même loi que Z.

   (d) En déduire une fonction Python `pareto(a,c)` qui prend en arguments deux réels a et c strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Z.

Exercices type concours

Exercice 6 (EDHEC 2021 un peu adapté).

1. (a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ peut être vue comme la fonction de répartition d'une variable Y à densité.
   Donner une densité de Y.

2. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

   On a déterminé dans l'exercice 5 (cas $c = 2$) la fonction de répartition de X ; cette fonction est
$$G : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

   On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$; on admet que M_n est une variable aléatoire à densité.

(a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

(b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

3. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Calculer, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

NB : on dit que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de* Y.

Exercice 7 (EDHEC 2023)**.** On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Comme dans l'exercice 5 on montre que f est une densité de probabilité.
On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

On a vu que F est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.

   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

On cherche à examiner la réciproque de la propriété précédente.
On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y. Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1 , on a :

- $\mathbb{P}(Y > t) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y. On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Justifier que $G(1) = 0$.

3. (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

   (b) Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

   (c) Montrer enfin la relation:

$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$$

4. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1,+\infty[$, associe $y(t)$. On note (E_1) l'équation différentielle $y+\dfrac{t}{c}y'=0$ et (E_2) l'équation différentielle $y+\dfrac{t}{c}y'=1$. Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

   (a) Soit z la fonction définie par $z(t)=t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1,+\infty[$.

   (b) En notant K la constante évoquée à la question 4a, donner toutes les solutions de (E_1).

   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1,+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

   (d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \Longleftrightarrow h-u$ est solution de (E_1).

   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t>1, \quad h(t)=1+\frac{\mathrm{K}}{t^c}$$

5. (a) Montrer finalement que l'on a:

$$\forall t>1, \quad \mathrm{G}(t)=1-\frac{1}{t^c}$$

   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1,+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Exercice 8. Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, et U suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Autrement dit, $\mathbb{P}(\mathrm{U}=-1)=\mathbb{P}(\mathrm{U}=1)=\dfrac{1}{2}$. *On dit que U est une variable de Rademacher.*
On définit $\mathrm{Y}=\mathrm{UX}$.

1. En utilisant la fonction `rd.normal`, programmer une fonction Python qui renvoie un tirage de la variable aléatoire Y.

2. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}\leqslant x)=\dfrac{1}{2}\big(\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant x)+\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant -x)\big)$.

3. En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.

4. Calculer l'espérance de U ; en déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{XY})=0$.

5. Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$.

6. (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

   (b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}_+,\qquad \int_0^{\mathrm{A}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{A}^3 e^{-\frac{\mathrm{A}^2}{2}}+3\int_0^{\mathrm{A}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

   (d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^4\right)=3$

7. (a) Vérifier que $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\right)=3$.

   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}^2,\mathrm{Y}^2\right)$.

   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

Exercice 9.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(1)$. On pose

$$Y = \lfloor X \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad Z = X - \lfloor X \rfloor$$

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Reconnaître la loi de Y, et calculer son espérance.
3. Déterminer $Z(\Omega)$.
4. Soit $t \in [0,1[$. Montrer : $\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(k+t) - F_X(k))$. En déduire la fonction de répartition de Z ; montrer que Z est à densité, et en donner une densité.

Exercice 10 (EML 2001)**.**

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

   (b) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt.$

   (c) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1.$

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

$$E(X_n) = n+1 \quad V(X_n) = n+1$$

   (b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t)\,dt \simeq 0{,}37 \quad \int_0^6 f_4(t)\,dt \simeq 0{,}71 \quad \int_0^8 f_4(t)\,dt \simeq 0{,}90$$

   Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.
   Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leqslant 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
   On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

   (a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.
   Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0 .

   (b) Soient $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'événement $(Y_t \geqslant n)$.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

Exercice 11. Soit p un réel de $]0,1[$.
La population active d'un pays est découpée en n classes socioprofessionnelles ; on modélise le revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu de la classe i par une variable aléatoire à densité X_i, suivant la loi de Pareto de paramètre i ; dont la fonction de répartition est donnée par (cf. exos précédents) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On définit aussi une variable aléatoire Y, à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, telle que $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n-1, p)$.

On effectue un tirage aléatoire de Y ; puis, si Y a pris la valeur i, on choisit au hasard (équiprobable) un individu de la classe socioprofessionnelle i.
On note Z_n la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros ; on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n.

1. Expliciter $G_n(x)$ pour tout réel x strictement inférieur à 1 .
2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1 .
   (a) Justifier que pour tout entier i compris entre 1 et n :
   $$\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) = F_i(x).$$
   (b) Montrer que :
   $$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$
   (c) En déduire que :
   $$G_n(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}.$$
3. Justifier que Z_n est une variable aléatoire à densité.
4. On suppose qu'on dispose d'une fonction Python `simulX` prenant en argument un entier i et renvoyant un tirage de X_i.
   Écrire une fonction en langage Python, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z_n.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que, pour tout x réel :
   $$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} G_n(x)$. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la fonction de répartition.

Quelques compléments sur la loi normale

Exercice 12. Soient X_1 et X_2 indépendantes ; on suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Rappeler les densités de X_1 et X_2.
2. Donner la loi de la variable $X_1 - X_2$.
3. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2)$.
   Soit
   $$U = \frac{X_1 - X_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$
   Montrer que $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Exprimer l'événement $(X_1 \leqslant X_2)$ en fonction de U ; en déduire que
   $$\mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

Exercice 13 (Loi log-normale)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \exp(X)$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de la fonction Φ.
2. Déterminer une densité de Y.
3. Généraliser les deux questions précédentes à $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$ quelconques.

Exercice 14. Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $X = N + |N|$, et $Y = N|N|$.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Montrer que Y admet une variance. Calculer $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$ à l'aide d'une IPP (en intégrant $xe^{-x^2/2}$) ; puis $V(Y)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N \leqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ pour $x < 0$.
5. Soit $x > 0$. En utilisant le SCE $\{(N > 0), (N \leqslant 0)\}$, montrer que
   $$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(0 < N \leqslant \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
   En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \Phi\left(\dfrac{x}{2}\right)$, où on a noté Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
6. La variable X est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Indications

... à suivre !