ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2025-2026
Mathématiques

Programme de colle n°16
Semaine du 9/02

Variables aléatoires à densité

Attention : en cohérence avec l'étude des intégrales impropres, seules les densités admettant des limites finies à gauche et à droite en tout réel sont au programme.

Pour cette semaine, les exercices étoilés de la feuille de TD 11 sur les variables à densité sont exigibles.

NB : tous les exemples de l'exercice 1 n'ont pas été traités : il s'agit ici de connaître les techniques mises en jeu et de savoir les appliquer à toute loi donnée par l'examinateur.

Intégrales impropres

Les outils du chapitre précédent seront mobilisés dans ce chapitre !

Variables à densité

- Fonction de répartition ; ses propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, continuité à droite en tout point.
  $\forall\, a < b \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
  Pour tout réel x :
  - $\mathbb{P}(X < x) = \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$
  - $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$
  - si F_X est continue en x, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- La fonction de répartition d'une variable certaine $X = a$ doit être connue.
- Une variable X est à densité ssi F_X est continue, et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. Dans ce cas, toute fonction f telle que $F_X' = f$ (sauf en un nombre fini de points) est appelée densité de f.
  NB : une variable à densité admet donc plusieurs densités ; notamment, en les points où F_X n'est pas dérivable, on peut donner une valeur arbitraire à f.
- Réciproquement, on appelle *densité* toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Il existe alors une variable de densité f.
- Si X est une variable de densité f, on a : pour tout réel x, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
  Expression des quantités $\mathbb{P}(X \leqslant x)$, $\mathbb{P}(X \geqslant x)$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b)$ en fonction d'intégrales de f.
  Ces dernières probabilités sont inchangées si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.
- **Lois usuelles :**
  Expressions d'une densité et de la fonction de répartition pour :
  - $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.
  - $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (et en particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$).

- Une variable à densité f admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge *absolument* ; on a alors $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.
Généralisation : moments d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.

- Une variable à densité f admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Elle admet alors une espérance, et on a : $V(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

- Les étudiants doivent savoir repérer le cas d'une densité paire ; en cas d'existence de l'espérance, cette dernière est alors nulle.
Rédaction attendue : Une fois que la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est démontrée, on peut dire sans démo supplémentaire : « par (im-)parité on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (cas pair) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (cas impair) ».
Néanmoins il faut pouvoir redémontrer cela si l'énoncé l'exige (changement de variable $u = -t$).

- Espérances et variances des lois usuelles.

- Théorème de transfert : soit X de densité f nulle hors d'un intervalle $[a,b]$; soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points ; la variable $g(X)$ admet une espérance ssi $\int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
Dans ce cas $\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Obtention de la fonction de répartition et/ou densité de var de type $g(X)$ quand on connaît celle de X dans des cas simples : g est affine, est la fonction carré, exp, ln, etc.

Cas de plusieurs variables aléatoires définies sur le même univers

- Linéarité et croissance de l'espérance (si $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$).

- Indépendance de variables aléatoires réelles : X et Y sont indépendantes ssi, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$:
$$\mathbb{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbb{P}(X \in I) \times \mathbb{P}(Y \in J)$$
Équivalence de cette définition avec le critère : X,Y indépendantes ssi, pour tous réels (t_1, t_2) :
$$\mathbb{P}\big([X \leqslant t_1] \cap [Y \leqslant t_2]\big) = \mathbb{P}(X \leqslant t_1) \times\ P(Y \leqslant t_2)$$

- Conséquence : si X et Y sont indépendantes, « tout événement portant uniquement sur X est indépendant de tout événement portant uniquement sur Y ».

- Extension à n variables mutuellement indépendantes.

- Résultats : lemme des coalitions ; espérance d'un produit de variables mutuellement indépendantes ; variance d'une somme de variables mutuellement indépendantes.

- Loi du max et du min de n variables aléatoires indépendantes (et en particulier, suivant la même loi) : la méthode doit être connue.