Devoir surveillé n°4

07/02/2026

Durée : 4h

Typos corrigées

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***mettre en évidence*** *les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S'il existe au moins un exercice dans lequel aucune question d'informatique n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[\,,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Étude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n).
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter la fonction `approx(eps)` suivante qui renvoie un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```python
def approx(eps):
    n = 0
    while ......
        n = ......
    return n
```

   (b) La commande

```python
print(approx(10**(-4))
```

   affiche l'une des trois valeurs 55, 70 ou 85. Préciser laquelle en admettant que $\ln(10) \simeq 2,3$.
4. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
   Indication : on commencera par montrer que $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n}\left(1 + \dfrac{v_n}{2n}\right)$. .
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que l'intégrale définissant J_n est bien convergente.

2. Soit $\mathrm{A} \geqslant 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que
   $$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{A}}{3n(1+\mathrm{A}^3)^n} + \frac{1}{3n}\int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que $\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n+1} = \dfrac{1}{3n}\mathrm{J}_n$; puis que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{J}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{J}_n$$

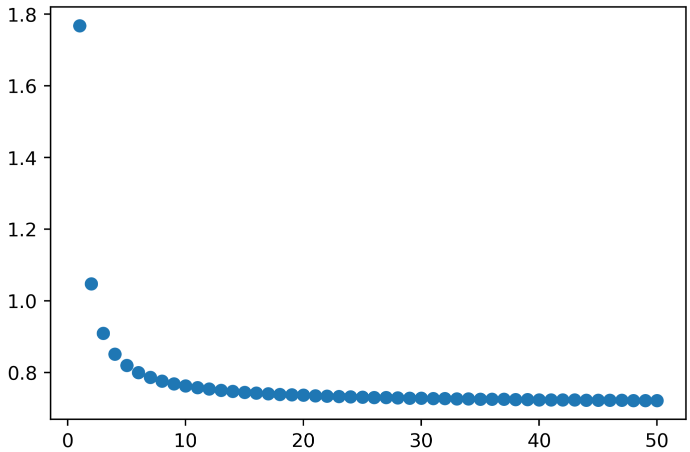
3. On admet que $\mathrm{J}_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

   (a) Écrire en Python une fonction `liste_J(n)` prenant en argument un entier n et qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) On exécute ensuite le code :

   ```
   N = np.array([k for k in range(1,51)])
   J = np.array(liste_J(50))
   plt.scatter(N,N*J**3)
   plt.show()
   ```

   et on obtient le tracé suivant :

   Expliquer ce qui est représenté sur ce tracé. Que peut-on conjecturer ?

4. Soit $\alpha > 0$; on définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{\alpha}\mathrm{J}_n$.

   (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\alpha - \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{18}\right)\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (b) En déduire un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ (on discutera suivant les valeurs de α).

   (c) Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

5. **On suppose jusqu'à la fin du problème que $\alpha = \dfrac{1}{3}$.**

   (a) Montrer que la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ; puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

   (b) On note $\mathrm{K} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Déterminer un équivalent de J_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $f :]0+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. (a) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire : $f(x) \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$.

3. (a) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

   (c) En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. (a) Montrer : $\forall x > 0,\ f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

   (b) Montrer que la fonction $\mathrm{R} : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner l'expression de $\mathrm{R}'(x)$ sur cet intervalle.

   (c) En déduire que f est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : \ y' - y = -\frac{1}{x}$$

5. On montre ici le résultat suivant : f est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

   (a) Donner les solutions de l'équation $(\mathrm{E}_0) \ : \ y' - y = 0$.

   (b) La *méthode de la variation de la constante* consiste à chercher une solution particulière de (E) en faisant « varier la constante » de la question précédente : on pose $y_p : x \mapsto \mathrm{K}(x)e^x$.
   Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si : $\forall x > 0,\ \mathrm{K}'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

   (c) En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \left(\mathrm{K} - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x$$

   où K est un nombre réel quelconque.

   (d) Montrer que f est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4

On lance indéfiniment une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $q = 1-p$.
On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2 , on dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un **changement** s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient Pile (resp. Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer » .
Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $\mathrm{P}_1\mathrm{F}_2$ à la place de $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.
Par exemple, si $n = 7$ et qu'on obtient la succession de tirages Pile,Pile,Face,Face,Pile,Face,Pile :

- les lancers 3,5,6,7 sont des changements ;
- on obtient $\mathrm{X}_7 = 4$.

Partie 1 : Python.

1. On suppose le package `numpy.random` importé avec l'alias `rd`.
   Justifier que la commande `rd.binomial(1,p,n)` renvoie une liste de n nombres aléatoires indépendants, valant 0 avec probabilité $1-p$ et 1 avec probabilité p..

2. Compléter la fonction suivante qui renvoie un tirage de la variable X_n décrite plus haut.

```python
def changements(n,p):
    c = .....
    L = rd.binomial(1,p,n)
    for k .... :
        if .... :
            c = c+1
    return c
```

3. Utiliser cette fonction pour écrire un code qui permet d'obtenir une approximation de $\mathbb{E}(X_{10})$ dans le cas $p = \dfrac{3}{5}$.

Partie 2 : étude de quelques exemples.

4. Donner la loi de X_2.

5. (a) Donner la loi de X_3.
   (b) Vérifier que $\mathbb{E}(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3-8pq)$.

Partie 3 : étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

6. Déterminer $X_n(\Omega)$.

7. Exprimer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.

8. En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$$

9. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $\mathbb{P}(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

10. Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2 , on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernoulli).
    Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

Partie 4 : étude du cas $p = q$.

11. Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 2, que X_2 et X_3 suivent chacune une loi binômiale.

12. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dénombrer les successions de n lancers de pièce présentant k changements. En déduire que $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n-1, \dfrac{1}{2}\right)$.