Devoir surveillé n°4
Corrigé

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n,+\infty[\,,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. **Étude de f_n.**

   (a) **Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n,+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.**

   En introduisant une primitive F de $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $f_n(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(n)$. F est $\mathscr{C}^1$ car $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue ; en dérivant on trouve : $\forall x \in [n,+\infty[,\ f_n'(x) = \mathrm{F}'(x) = e^{\sqrt{x}}$.
   On voit immédiatement que f_n' est toujours strictement positive : f_n est strictement croissante sur $[n,+\infty[$.

   (b) **En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.**

   Pour minorer une intégrale, on minore la fonction à intégrer. Comme on est sur $\mathbb{R}_+$, les exponentielles sont $\geqslant 1$.
   On peut écrire : $\forall\, t \in [n,x],\ e^{\sqrt{t}} \geqslant 1$. En intégrant sur $[n,x]$ (bornes dans l'ordre croissant) :

   $$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^x 1\,\mathrm{d}t = (x-n)$$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   (c) **En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n,+\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.**

   f_n est continue et strictement croissante sur $[n,+\infty[$. $f_n(n) = \displaystyle\int_n^n e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[n,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
   $1 \in \mathbb{R}_+$, donc il existe un unique $u_n \in [n,+\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. **Étude de la suite (u_n).**

   (a) **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.**

   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$ (car il est dans $[n,+\infty[$!!).
   Pour $n \to +\infty$, $n \to +\infty$ (!) donc par minoration, $u_n \to +\infty$.

   (b) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

   u_n est défini par :

   $$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 1$$

   Encadrons cette intégrale : par croissance de $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ sur $[n,u_n]$, on peut écrire :

   $$\forall\, t \in [n,u_n],\ e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}}$$

   ce qui donne en intégrant sur $[n,u_n]$ (bornes rangées dans le bon ordre car $u_n \geqslant n$) :

   $$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}}\,\mathrm{d}t$$

   $$e^{\sqrt{n}}\int_n^{u_n} 1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{\sqrt{u_n}}\int_n^{u_n} 1\,\mathrm{d}t$$

et donc
$$e^{\sqrt{n}}(u_n-n)\leqslant\int_n^{u_n}e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\leqslant e^{\sqrt{u_n}}(u_n-n)$$
On obtient donc :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ e^{\sqrt{n}}(u_n-n)\leqslant 1\leqslant e^{\sqrt{u_n}}(u_n-n)$$
De $e^{\sqrt{n}}(u_n-n)\leqslant 1$ on tire (avec $e^{\sqrt{n}}>0$) que $u_n-n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$;
et de $1\leqslant e^{\sqrt{u_n}}(u_n-n)$ on tire $e^{-\sqrt{u_n}}\leqslant u_n-n$.
On a bien l'encadrement recherché.

3. (a) **Utiliser la question 2b) pour compléter la fonction `approx(eps)` suivante qui renvoie un entier naturel n pour lequel u_n-n est inférieur ou égal à 10^{-4}.**

D'après la majoration $u_n-n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$, pour que $u_n-n<10^{-4}$ il suffit que $e^{-\sqrt{n}}<10^{-4}$. On écrit donc :

```
def approx(eps):
    n = 0
    while np.exp(-np.sqrt(n))>10**(-4)
        n = n+1
    return n
```

(b) **La commande**

```
print(approx(10**(-4))
```

affiche l'une des trois valeurs 55, 70 ou 85. Préciser laquelle en admettant que $\ln(10)\simeq 2,3$.

Ce script trouve en fait le premier n tel que $e^{-\sqrt{n}}<10^{-4}$, ce qui équivaut par stricte croissance du ln à :$-\sqrt{n}<-4\ln(10)$ ou encore $n>16\big(\ln(10)\big)^2$. Avec $16\times(2.3)^2\simeq 84.6$, la valeur recherchée est $n=85$.

4. **On pose $v_n=u_n-n$.**

(a) **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.**

On a montré dans la question précédente :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}}\leqslant v_n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$$
Pour $n\to+\infty$, $e^{-\sqrt{n}}\to 0$; et on a aussi $u_n\to+\infty$, et donc $e^{-\sqrt{u_n}}\to 0$. Par théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

(b) **Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\dfrac{x}{2}$.**

On étudie le signe de la fonction $f(x)=\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}$ sur $[-1,+\infty[$.
Cette fonction est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$; on a sur cet intervalle
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$$
Le signe de f' est celui de son numérateur ; on trouve que
$$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant\sqrt{1+x}\Leftrightarrow 1\geqslant 1+x\Leftrightarrow x\leqslant 0$$
de sorte que f est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 0 ; et ce max vaut $f(0)=0$.

f est donc négative sur $]-1,+\infty[$, ce qui donne l'inégalité recherchée.

(c) **Vérifier ensuite que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$**.**

Indication : **on commencera par montrer que** $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n}\left(1+\dfrac{v_n}{2n}\right)$**.**

Commençons par montrer l'inégalité de l'indication : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{v_n + n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}$$

Comme $\dfrac{v_n}{n} \geqslant 0$, $\sqrt{1+\dfrac{v_n}{n}} \leqslant 1+\dfrac{v_n}{2n}$ d'après la question précédente, et, avec $\sqrt{n} \geqslant 0$, on obtient

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leqslant \sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right)$$

On en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right) = -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$
$$e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \qquad \text{(croissance de exp)}$$

(d) **Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que :** $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$**.**

Rassemblons les résultats montrés dans les question précédentes. On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

On déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

En divisant par $e^{-\sqrt{n}} > 0$ on obtient

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$$

Or comme $v_n \to 0$, $\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}} \to 0$ et donc $\exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \to 1$.
Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$; ce qui donne bien $v_n \sim_{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

1. **Montrer que l'intégrale définissant J_n est bien convergente.**

   $x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+x^3\right)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; de plus on a l'équivalent

   $$\frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}$$

   $n \geqslant 1$ donc $3n > 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}\,\mathrm{d}x$ converge (Riemann) ; par comparaison de fonctions positive l'intégrale J_n est bien convergente.

2. **Soit** $\mathrm{A} \geqslant 0$**, et** $n \in \mathbb{N}^*$**.**

(a) **Montrer que**
$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx = -\frac{A}{3n(1+A^3)^n} + \frac{1}{3n}\int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$$

On a, pour $A \geqslant 0$:
$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^A x\frac{3x^2}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

On va effectuer une IPP.

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{3x^2}{(1+x^3)^{n+1}} = 3x^2(1+x^3)^{-(n+1)}$; alors $u'(x) = 1$ et $V(x) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1+x^3)^n}$.

Les fonctions en jeu sont $\mathscr{C}^1$.

L'IPP donne :
$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{3}\left(\left[-\frac{1}{n}\frac{x}{(1+x^3)^{n+1}}\right]_0^A - \int_0^A 1\times -\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx\right)$$
$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx = -\frac{A}{3n(1+A^3)^{n+1}} + \frac{1}{3n}\int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$$

(b) **Montrer que** $J_n - J_{n+1} = \dfrac{1}{3n}J_n$ **; puis que**
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}J_n$$

On observe que
$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+x^3)^n} - \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\right)dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx \quad \text{(qui converge !)} \end{aligned}$$

Ça ressemble assez violemment avec ce qui a été vu à la question précédente !
Faisons alors tendre $A \to +\infty$ dans la formule précédente.
$\dfrac{A}{(1+A^3)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{A^{3n-1}} \to 0$; et donc
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{3n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$$

(les intégrales convergent) ; ce qui donne $J_n - J_{n+1} = \dfrac{1}{3n}J_n$; puis
$$J_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)J_n = \frac{3n-1}{3n}J_n.$$

3. **On admet que** $J_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$**.**

(a) **Écrire en Python une fonction** `liste_J(n)` **prenant en argument un entier** n **et qui renvoie la liste des** n **premiers termes de la suite** $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**.**

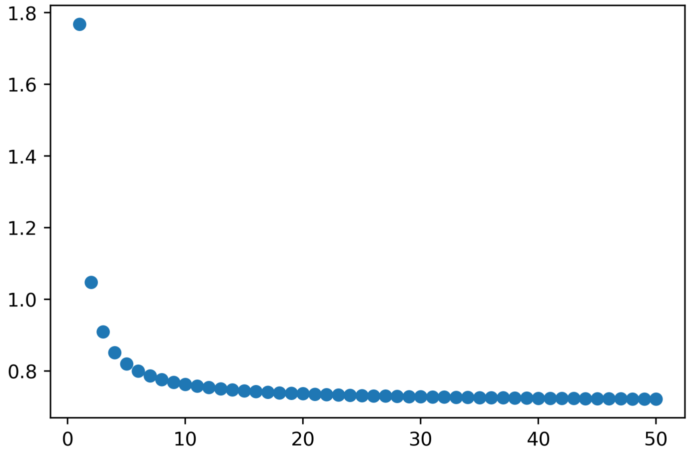
On construit $L = [J_1, J_2, \ldots, J_n]$ de proche en proche. Initialement, $L = \left[\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right]$; puis on ajoute chaque nouveau terme s'exprimant en fonction du précédent.

```
def liste_J(n):
    L=[2*np.pi/(3*np.sqrt(3))]
    for k in range(1,n):
        L.append((3*k-1)/(3*k)*L[-1])
    return L
```

(b) **On exécute ensuite le code :**

```
N = np.array([k for k in range(1,51)])
J = np.array(liste_J(50))
plt.scatter(N,N*J**3)
plt.show()
```

et on obtient le tracé suivant :



Expliquer ce qui est représenté sur ce tracé. Que peut-on conjecturer ?

Ce tracé représente les valeurs de nJ_n^3 en fonction de n. Il semble que cette suite converge : $\exists \alpha > 0,\ nJ_n^3 \to \alpha$.

On tire de cela $nJ_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$; puis $J_n^3 \sim \dfrac{\alpha}{n}$; et enfin

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^{1/3}}$$

4. **Soit** $\alpha > 0$ **; on définit, pour** $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha J_n$**.**

   (a) **Calculer** $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$**.**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{J_{n+1}}{J_n}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{3n-1}{3n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1-\frac{1}{3n}\right)\end{aligned}$$

   Donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right).$$

   (b) **À l'aide du développement limité de** $\ln(1+x)$ **en 0, déterminer un équivalent de** $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ **(on discutera suivant les valeurs de** α**).**

   Pour $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0$ et $-\dfrac{1}{3n} \to 0$ donc on développe les ln :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = -\frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n} + \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{18}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(c) **En déduire que la série de terme général** $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ **converge si et seulement si** $\alpha = \frac{1}{3}$**.**

- Si $\alpha \neq \frac{1}{3}$, le DL précédent donne l'équivalent :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}$$

Donc si $\alpha > \frac{1}{3}$ par comparaison de séries à termes positifs, à une série de Riemann divergente (harmonique) on conclut que $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge ; et si $\alpha > \frac{1}{3}$ on passe par les séries opposées pour appliquer le théorème de comparaison de SATP ; on en déduit que $\sum\left(-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ diverge ; et donc $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge également.

- si $\alpha = \frac{1}{3}$, le terme dominant en $\frac{1}{n}$ disparaît et on a l'équivalent

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{18}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{2}{9n^2}$$

et par comparaison de $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ au terme général $\frac{2}{9n^2}$ d'une série cv (Riemann encore) on a la convergence de $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

5. **On suppose jusqu'à la fin du problème que** $\alpha = \frac{1}{3}$**.**

(a) **Montrer que la suite** $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge ; puis que** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers une limite strictement positive.**

Classique : la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est téléscopique.
Pour $N \geqslant 1$ on écrit :

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) = \ln(u_N) - \ln(u_1)$$

Cette somme ayant une limite finie pour $N \to +\infty$ on peut conclure que la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Dès lors, $u_n = \exp(\ln(u_n)) \to e^{\ell} > 0$.

(b) **On note** $K = \lim_{n\to+\infty} u_n$**. Déterminer un équivalent de** J_n **pour** $n \to +\infty$**.**

On rappelle que $\alpha = \frac{1}{3}$; donc $u_n = n^{1/3}J_n \to K \neq 0$ ce qui donne aussi $n^{1/3}J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ et donc

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1/3}}$$

ce qui valide bien la conjecture effectuée plus haut.

Exercice 3

1. **Montrer que, pour tout** $x \in\,]0, +\infty[$**, l'intégrale** $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ **converge.**

Pour $x \to 0$ fixé, $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $t \geqslant 1$, $x + t \geqslant t \geqslant 1$ donc

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant e^{-t}$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

On note $f :]0+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in]0,+\infty[$, par : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. (a) **Montrer : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)\geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.**

   Comme on intègre une fonction positive, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
   De plus, $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow e^{-t}\geqslant e^{-1}$; donc

   $$\forall\, t\in[0,1],\ \frac{e^{-t}}{x+t}\geqslant\frac{e^{-1}}{x+t}$$

   et en intégrant sur $[0,1]$:

   $$f(x)\geqslant\int_0^1\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

   (b) **En déduire : $f(x)\xrightarrow{x\to0^+}+\infty$.**

   On calcule cette dernière intégrale :

   $$\int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,dt=e^{-1}\int_0^1\frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t=e^{-1}\int_0^1\frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t=e^{-1}\left[\ln(x+t)\right]_0^1=e^{-1}\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big)$$

   Donc $f(x)\geqslant e^{-1}\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big)$. Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+}e^{-1}\big(\ln(x+1)-\underbrace{\ln(x)}_{\to-\infty}\big)=+\infty$; et donc par minoration

   $$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$$

3. (a) **Montrer : $\forall x\in]0,+\infty[,\ 0<f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$. En déduire : $f(x)\xrightarrow{x\to+\infty}0$.**

   f étant l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ d'une fonction positive, continue, non nulle, elle est >0.
   Ensuite on majore, comme d'habitude, la fonction dans l'intégrale.
   Pour tout $t\geqslant0$, $x+t\geqslant q$; et en passant à l'inverse (strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) puis en multipliant par $e^{-t}>0$, on trouve :

   $$\forall\, t\geqslant0,\ \frac{e^{-t}}{x+t}\leqslant\frac{e^{-t}}{x}$$

   On intègre sur $\mathbb{R}_+$ (les intégrales convergent, vu avec les comparaisons plus haut) :

   $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=1$ (calcul direct avec une borne $\mathrm{A}\to+\infty$, ou intégrale de la densité usuelle de $\mathscr{E}(1)$) ; ce qui donne le résultat.

   (b) **Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :**

   $$\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant\frac{1}{x}-f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}.$$

   Pour la convergence on effectue un test de Riemann, ou on invoque l'existence de l'espérance d'une variable $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{E}(1)$.

Ensuite on met $\dfrac{1}{x}-f(x)$ sous une forme utilisable : l'idée est ici de reprendre la forme sous laquelle il est apparu. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-f(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La fonction à intégrer est positive donc $\dfrac{1}{x}-f(x)\geqslant 0$; pour l'autre inégalité on majore encore.
Pour $t\geqslant 0$, $x(x+t)\geqslant x^2$ et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(on peut se permettre d'aller un peu plus vite, ce sont les mêmes techniques et arguments que la question précédente !).

Il ne reste plus qu'à calculer $\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour $\mathrm{A}\geqslant 0$, et avec une IPP, et une croissance comparée pour la limite :

$$\int_0^{\mathrm{A}}te^{-t}\,\mathrm{d}t=[-te^{-t}]_0^{\mathrm{A}}+\int_0^{\mathrm{A}}e^{-t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}}-\left[e^{-t}\right]_0^{\mathrm{A}}=-\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}}-e^{-\mathrm{A}}+1\to 1$$

Donc $\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t=1$ et on a bien l'inégalité demandée.

(c) **En déduire : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$.**

On étudie le quotient $\dfrac{f(x)}{1/x}=xf(x)$. En reprenant l'encadrement précédent et en multipliant par $x>0$:

$$0\leqslant 1-xf(x)=\leqslant\frac{1}{x}$$

Pour $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{x}\to 0$; donc par gendarmes $1-xf(x)\to 0$ et enfin

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=1$$

ce qui donne bien l'équivalent demandé.

4. (a) **Montrer : $\forall\,x>0,\ f(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.**

On effectue le changement de variable $u=x+t$ (affine, on peut même le faire sur l'intégrale impropre).
On a alors $t=u-x$ et $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$; et $\int_0^{+\infty}(\ldots)\,\mathrm{d}t$ devient $\int_x^{+\infty}(\ldots)\,\mathrm{d}u$.

Il vient

$$\begin{aligned}f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t&=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-(u-x)}}{u}\,\mathrm{d}u\\&=\int_x^{+\infty}e^x\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\&=e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

(b) **Montrer que la fonction $\mathrm{R}:x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner l'expression de $\mathrm{R}'(x)$ sur cet intervalle.**

Reste intégral !!
On cherche à appliquer le TFA mais il faut pour cela une intégrale sur un segment : donc on découpe.

$$\forall x>0,\ \mathrm{R}(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u=\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}_{=\mathrm{I}}-\int_1^x\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

I est une constante ; la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ est $\mathscr{C}^1$ pr TFA (la fonction à intégrer étant continue) ; et de dérivée $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{x}$.
On conclut que :

$$\forall x>0,\ \mathrm{R}'(x)=-\frac{e^{-x}}{x}$$

(c) **En déduire que f est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle**

$$(\mathrm{E})\ :\ y'-y=-\frac{1}{x}$$

$f:x\mapsto e^x\mathrm{R}(x)$ est donc $\mathscr{C}^1$; il suffit alors de dériver un produit.

$$\forall x>0,\ f'(x)=e^x\mathrm{R}(x)+e^x\mathrm{R}'(x)=f(x)+e^x\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)=f(x)-\frac{1}{x}$$

ce qui montre que f est solution de $y'-y=-\dfrac{1}{x}$.

5. **On montre ici le résultat suivant : f est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.**

(a) **Donner les solutions de l'équation $(\mathrm{E}_0)\ :\ y'-y=0$.**

Cours : ce sont les fonctions de la forme $t\mapsto\mathrm{K}e^t$, où $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$.

(b) **La *méthode de la variation de la constante* consiste à chercher une solution particulière de (E) en faisant « varier la constante » de la question précédente : on pose $y_p:x\mapsto\mathrm{K}(x)e^x$.**
Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si : $\forall x>0,\ \mathrm{K}'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}$.

Soit y_p de la forme donnée. On a

$$\begin{aligned}y_p\text{ solution de (E)}&\Leftrightarrow\forall x>0,\ y_p'(x)-y_p(x)=-\frac{1}{x}\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ \mathrm{K}'(x)e^x+\mathrm{K}(x)e^x-\mathrm{K}(x)e^x=-\frac{1}{x}\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ \mathrm{K}'(x)e^x=-\frac{1}{x}\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ \mathrm{K}'(x)=-\frac{e^{-x}}{x}\end{aligned}$$

(c) **En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :**

$$x\mapsto\left(\mathrm{K}-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x$$

où K est un nombre réel quelconque.

On a besoin d'UNE solution particulière : $\mathrm{K}_0:x\mapsto\displaystyle\int_1^x\left(-\frac{e^{-t}}{t}\right)\mathrm{d}t$ convient.
On sait ensuite que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_\mathrm{H}+y_\mathrm{P}$ où y_p est ci-dessus et y_H parcourt les solutions de l'équation homogène (E_0).

On trouve alors les fonctions de la forme

$$x\mapsto\mathrm{K}e^x+\mathrm{K}_0(x)e^x=\left(\mathrm{K}-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x$$

où K décrit $\mathbb{R}$.

(d) **Montrer que f est la seule solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.**

Par convergence de l'intégrale,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{K}-\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{K}-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Si $\mathrm{K}\neq\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, la parenthèse dans l'expression générale tend vers une limite réelle non nulle, et donc en multipliant par e^x on tombe sur

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\mathrm{K}-\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)}_{\to\alpha\neq 0}e^x=\pm\infty \quad \text{(suivant le signe de } \alpha)$$

La seule solution qui ne tend pas vers l'infini s'obtient donc pour $\mathrm{K}=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$: c'est la fonction

$$x\longmapsto\left(\mathrm{K}-\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x=\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x=\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)e^x$$

et on reconnaît bien f !!
MAIS ATTENTION : l'étude précédente ne nous dit pas que cette solution est de limite nulle !
Mais on a montré en 3a que c'était bel et bien le cas ; ce qui permet de conclure.

Exercice 4

On lance indéfiniment une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $q=1-p$.
On suppose que $p\in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2 , on dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient Pile (resp. Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer » .
Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $\mathrm{P}_1\mathrm{F}_2$ à la place de $\mathrm{P}_1\cap\mathrm{F}_2$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.
Par exemple, si $n=7$ et qu'on obtient la succession de tirages Pile,Pile,Face,Face,Pile,Face,Pile :

- **les lancers 3,5,6,7 sont des changements ;**
- **on obtient $\mathrm{X}_7=4$.**

Partie 1 : Python.

1. **On suppose le package `numpy.random` importé avec l'alias `rd`.**
Justifier que la commande `rd.binomial(1,p,n)` renvoie une liste de n nombres aléatoires indépendants, valant 0 avec probabilité $1-p$ et 1 avec probabilité p.

   Cette commande renvoie n tirages indépendants d'une variable suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(1,p)$; qui n'est autre que la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
   On obtient bien la description demandée.

2. **Compléter la fonction suivante qui renvoie un tirage de la variable X_n décrite plus haut.**

   La commande `rd.binomial(1,p,n)` modélise les n lancers ; que l'on considère que 1 vaut Pile et 0 vaut Face, ou le contraire, le problème est le même : il faut compter le nombre de composantes de la liste L différentes de celle qui les précèdent.
   On écrit par exemple :

```
def changements(n,p):
    c = 0 # init compteur
    L = rd.binomial(1,p,n)
```

```
    for k in range(1,n): # on ne teste pas le 1er lancer !
        if L[k]!=L[k-1] : # lancer différent du précédent
            c = c+1
    return c
```

3. **Utiliser cette fonction pour écrire un code qui permet d'obtenir une approximation de $\mathbb{E}(X_{10})$ dans le cas $p = \dfrac{3}{5}$.**

   Comme d'habitude il faut faire un grand nombre de tirages de la variable dont on souhaite approximer l'espérance, et renvoyer la valeur moyenne. On peut proposer :

```
def esperance():
    s = 0
    for k in range(10000):
        s = s + changements(10,3/5)
    return s/10000
```

Partie 2 : étude de quelques exemples.

4. **Donner la loi de X_2.**

   En 2 lancers on n'aura que 0 ou 1 changement : $X_2(\Omega) = \{0,1\}$
   On a 0 changement si les lancers donnent P_1P_2 ou F_1F_2. Par incompatibilité de ces deux issues, et indépendance des lancers successifs, on a

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = p^2 + q^2$$

   On a 1 changement si on obtient P_1F_2 ou F_1P_2. De même :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = pq + qp = 2pq$$

   NB : on vérifie que $\mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) = p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$: c'est rassurant.

5. (a) **Donner la loi de X_3.**

   Cette fois $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$.

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(P_1P_2P_3) + \mathbb{P}(F_1F_2F_3) = p^3 + q^3$$
$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(F_1P_2F_3) + \mathbb{P}(P_1F_2P_3) = q^2p + p^2q = pq\underbrace{(q+p)}_{=1} = pq$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(P_1P_2F_3) + \mathbb{P}(P_1F_2F_3) + \mathbb{P}(F_1F_2P_3) + \mathbb{P}(F_1P_2P_3) = p^2q + pq^2 + q^2p + qp^2 = pq(p+q+q+p) = 2pq$$

   (b) **Vérifier que $\mathbb{E}(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3-8pq)$.**

   Avec la formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$:

$$\mathbb{E}(X_3) = \mathbb{P}(X_3 = 1) + 2\mathbb{P}(X_3 = 2) = 2pq + 2\times pq = 4pq$$

   et avec le théorème de transfert, $E(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k)$:

$$\mathbb{E}(X_3^2) = \mathbb{P}(X_3 = 1) + 4\mathbb{P}(X_3 = 2) = 2pq + 4\times pq = 6pq$$

   et par Konig-Huygens : $V(X_3) = \mathbb{E}(X_3^2) - (\mathbb{E}(X_3))^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3-8pq)$.
   NB : toutes ces quantités existent bien, car X_3 ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Partie 3 : étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

6. **Déterminer** $X_n(\Omega)$**.**

   Durant n lancers, il ne peut intervenir aucun changement ; ou chaque lancer peut donner un changement (sauf le 1er bien sûr !).
   On voit ainsi que $X_n(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.

7. **Exprimer** $\mathbb{P}(X_n = 0)$ **en fonction de** p, q **et** n**.**
   $X_n = 0$ (aucun changement) a lieu pour les 2 successions $P_1P_2\dots P_n$ et $F_1F_2\dots F_n$. Par indépendance des lancers successifs, et incompatibilité de ces deux issues :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(P_1P_2\dots P_n) + \mathbb{P}(F_1F_2\dots F_n) = p^n + q^n$$

8. **En décomposant l'événement** $(X_n = 1)$ **en une réunion d'événements incompatibles, montrer que**

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$$

   On s'intéresse donc aux successions de n lancers où il n'y a qu'un changement : celui-ci peut survenir au lancer 2,3,... n. De plus on peut changer de pile vers Face, ou de Face vers Pile.

   On obtient donc les possibilités

$$P_1F_2F_3\dots F_n \qquad P_1P_2F_3\dots F_n \qquad \dots \qquad P_1P_2P_3\dots P_{n-1}F_n$$

   et

$$F_1P_2P_3\dots P_n \qquad F_1F_2P_3\dots P_n \qquad \dots \qquad F_1F_2F_3\dots F_{n-1}P_n$$

   Pour la première ligne, les probabilités respectives sont

$$pq^{n-1} \qquad p^2q^{n-2} \qquad \dots \qquad p^{n-1}q$$

   et on a à les sommer :

$$\sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k = q^n \frac{p}{q} \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)} = pq \frac{q^{n-1}\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right)}{q\left(1 - \frac{p}{q}\right)} = pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p}$$

   où on a utilisé la formule pour une somme géométrique FINIE de raison $\frac{p}{q} \neq 1$ ($p \neq q$ d'après l'énoncé).

   Pour la seconde ligne, on remarque qu'il suffit d'échanger les rôles des Pile et des Face, donc de changer p et q et q en p : on trouve alors la probabilité

$$qp\frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q} = pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p}$$

   La probabilité demandée s'obtient en additionnant les résultats des deux lignes, qui sont identiques :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 2pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p}$$

9. **En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer** $\mathbb{P}(X_n = n-1)$ **en fonction de** p **et** q**.**
   On a $(X_n = n-1)$ ssi il y a un changement à chaque lancer (dès le 2ème).
   Si n pair (on note $n = 2k$) on obtient donc :

$$(X_n = n-1) = (P_1F_2)(P_3F_4)\dots(P_{2k-1}F_{2k}) \cup (F_1P_2)(F_3P_4)\dots(F_{2k-1}P_{2k})$$

   et par indépendance des lancers et incompatibilité :

$$\mathbb{P}(X_n = n-1) = 2(pq)^k = 2(pq)^{n/2}$$

Si n impair (on note $n = 2k+1$) on obtient cette fois :

$$(X_n = n-1) = (P_1F_2)(P_3F_4)\dots(P_{2k-1}F_{2k})P_{2k+1} \cup (F_1P_2)(F_3P_4)\dots(F_{2k-1}P_{2k})F_{2k+1}$$

et par indépendance des lancers et incompatibilité :

$$\mathbb{P}(X_n = n-1) = (pq)^k p + (pq)^k q = (pq)^k(p+q) = (pq)^k = (pq)^{\frac{n-1}{2}}$$

10. **Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2 , on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernoulli).**
Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

C'est classique : X_n compte le nombre de changements, donc est égal au nombre de Z_k valant 1 (pour $2 \leqslant k \leqslant n$). Les Z_k valant 0 ou 1, il suffit donc de les sommer :

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$$

On déduit de la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(Z_k)$.

Pour conclure il faut la loi de Z_k.
$Z_k(\Omega) = \{0,1\}$ clairement.
Ensuite, on a $Z_k = 1$ ssi le k-ième lancer est un changement, donc ssi on a $P_{k-1}F_k$ ou $F_{k-1}P_k$. On en déduit avec les mêmes arguments que précédemment :

$$\mathbb{P}(Z_k = 1) = 2pq$$

On a donc $Z_k \hookrightarrow \mathscr{B}(2pq)$; d'où $\mathbb{E}(Z_k) = 2pq$ et finalement :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = 2(n-1)pq$$

Partie 4 : étude du cas $p = q$.

11. **Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 2, que X_3 suit une loi binômiale.**

On est donc ici dans le cas d'une pièce équilibrée : $p = q = \frac{1}{2}$.
D'après la partie 2 :

- $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$
- $\mathbb{P}(X_3 = 0) = p^3 + q^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X_3 = 2) = pq = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X_3 = 1) = 2pq = \frac{1}{2}$.

et on reconnaît $X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

12. **Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dénombrer les successions de n lancers de pièce présentant k changements. En déduire que $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.**

On a déjà justifié que $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
Ah, du dénombrement ! Que doit-on choisir pour construire une suite P/F comprenant k changements ?

- la position des k changements parmi les $n-1$ derniers lancers (le premier ne pouvant être un changement) : $\binom{n-1}{k}$ choix.
- les valeurs des lancers : en fait il suffit de choisir le résultat du premier lancer, ensuite tout le reste est fixé par la position des changements ! Donc 2 choix.

Au total, il existe $2\binom{n-1}{k}$ successions de n lancers qui présentent k changements. Or il y a en tout 2^n successions de n lancers possibles.
Par équiproba (la pièce est équilibrée !) :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{2\binom{n-1}{k}}{2^n} = \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}$$

et on obtient bien $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.