

Programme de colle n°17 Semaine du 16/02

Variables aléatoires à densité

Attention : en cohérence avec l'étude des intégrales impropres, seules les densités admettant des limites finies à gauche et à droite en tout réel sont au programme.

Pour cette semaine, les exercices étoilés de la feuille de TD 11 sur les variables à densité sont exigibles.

NB : tous les exemples de l'exercice 1 n'ont pas été traités : il s'agit ici de connaître les techniques mises en jeu et de savoir les appliquer à toute loi donnée par l'examineur.

Intégrales impropres

Les outils du chapitre précédent seront mobilisés dans ce chapitre !

Variables à densité

- Fonction de répartition ; ses propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, continuité à droite en tout point.
 $\forall a < b \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
Pour tout réel x :
 - $\mathbb{P}(X < x) = \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$
 - $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$
 - si F_X est continue en x , on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- La fonction de répartition d'une variable certaine $X = a$ doit être connue.
- Une variable X est à densité ssi F_X est continue, et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. Dans ce cas, toute fonction f telle que $F'_X = f$ (sauf en un nombre fini de points) est appelée densité de f .
NB : une variable à densité admet donc plusieurs densités ; notamment, en les points où F_X n'est pas dérivable, on peut donner une valeur arbitraire à f .
- Réciproquement, on appelle *densité* toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Il existe alors une variable de densité f .
- Si X est une variable de densité f , on a : pour tout réel x , $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
Expression des quantités $\mathbb{P}(X \leq x)$, $\mathbb{P}(X \geq x)$, $\mathbb{P}(a < X \leq b)$ en fonction d'intégrales de f .
Ces dernières probabilités sont inchangées si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.
- Lois usuelles :**
Expressions d'une densité et de la fonction de répartition pour :
 - $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
 - $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
 - $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (et en particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$).
- Une variable à densité f admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge *absolument* ; on a alors $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$.
Généralisation : moments d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.

- Une variable à densité f admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Elle admet alors une espérance, et on a : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- Les étudiants doivent savoir repérer le cas d'une densité paire ; en cas d'existence de l'espérance, cette dernière est alors nulle.

Rédaction attendue : Une fois que la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est démontrée, on peut dire sans démo supplémentaire : « par (im-)parité on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$ (cas pair) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ (cas impair) ». Néanmoins il faut pouvoir redémontrer cela si l'énoncé l'exige (changement de variable $u = -t$).

- Espérances et variances des lois usuelles.
- Théorème de transfert : soit X de densité f nulle hors d'un intervalle $[a, b]$; soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points ; la variable $g(X)$ admet une espérance ssi $\int_a^b g(x)f(x) dx$ converge absolument.
Dans ce cas $\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(x)f(x) dx$.
- Obtention de la fonction de répartition et/ou densité de var de type $g(X)$ quand on connaît celle de X dans des cas simples : g est affine, est la fonction carré, exp, ln, etc.

Cas de plusieurs variables aléatoires définies sur le même univers

- Linéarité et croissance de l'espérance (si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$).
- Indépendance de variables aléatoires réelles : X et Y sont indépendantes ssi, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I) \times \mathbb{P}(Y \in J)$$

Équivalence de cette définition avec le critère : X, Y indépendantes ssi, pour tous réels (t_1, t_2) :

$$\mathbb{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \times \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

- Conséquence : si X et Y sont indépendantes, « tout événement portant uniquement sur X est indépendant de tout événement portant uniquement sur Y ».
- Extension à n variables mutuellement indépendantes.
- Résultats : lemme des coalitions ; espérance d'un produit de variables mutuellement indépendantes ; variance d'une somme de variables mutuellement indépendantes.
- Loi du max et du min de n variables aléatoires indépendantes (et en particulier, suivant la même loi) : la méthode doit être connue.

Compléments sur la loi normale

- Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: expression de la densité usuelle, valeurs de l'espérance et de la variance. Utilisation de ces valeurs pour décider de la convergence et de la valeur de certaines intégrales.
- Propriétés de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$ (notée Φ par convention) : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- Stabilités :
 1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$;
 2. En particulier : on peut « centrer-réduire » une variable suivant une loi normale : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
 3. Si les X_i sont mutuellement indépendantes, avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, alors :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2\right)$$