

Devoir maison n°4
À rendre pour le 20/02

Exercice 1

Dans cet exercice, a désigne un réel tel que $a > 1$.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{a}{2}(1+x)^{a-1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{a}{2}(1-x)^{a-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Soit Z une variable aléatoire admettant f comme densité ; on note F_Z sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F_Z(x)$ pour tout réel x .

On considère maintenant la variable aléatoire $X = |Z|$. On note F_X la fonction de répartition de X .

3. (a) Déterminer la loi de X .
(b) Montrer que X est à densité, et qu'une densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x)^{a-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin]0, 1[\end{cases}$$

On se propose de déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X . Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

4. (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x .
(b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a .
5. (a) Montrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a .
(b) Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a .
(c) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}(e^{-2Y}) = \frac{a}{a+2}$.
En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X .

6. On considère enfin une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant toutes la loi de X .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. On note H_n la fonction de répartition de I_n .

- (a) Montrer que, pour tout réel x : $H_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$.
(b) En déduire la fonction de répartition de I_n ; puis, sans calcul mais en utilisant ce qui précède, l'espérance et la variance de I_n .
(c) Déterminer, pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x)$.

Exercice 2 : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, I_2, \dots, I_n$. Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose les T_k mutuellement indépendantes.

On notera F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et f une densité de cette même loi.

1. Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On admet que les conditions de l'expérience permettent de supposer les B_k indépendantes.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.

- (a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?
 - (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi de la variable B_k .
 - (c) En déduire la loi de la variable aléatoire S_t .
2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
 - (a) Que vaut $R_1(\Omega)$?
 - (b) Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.
 - (c) Déterminer la fonction de répartition de R_1 (qu'on notera F_1).
Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.
3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.