

Devoir maison n°4 Corrigé

Exercice 1

Dans cet exercice, a désigne un réel tel que $a > 1$.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{a}{2}(1+x)^{a-1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{a}{2}(1-x)^{a-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

$a > 0$ et sur $[-1, 1]$ $1+x$ et $1-x$ sont positifs ; donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ par composée de fonctions continues sur les intervalles concernés ; $a > 1$ donc $a-1 > 0$ donc pas de souci de dénominateur non nul.

Enfin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-1}^0 \frac{a}{2}(1+t)^{a-1} dt + \int_0^1 \frac{a}{2}(1-t)^{a-1} dt \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{(1+t)^a}{a} \right]_{-1}^0 - \frac{a}{2} \left[\frac{(1-t)^a}{a} \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a} - 0 \right) - \frac{a}{2} \left(0 - \frac{1}{a} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

f est donc bien une densité de probabilité.

Soit Z une variable aléatoire admettant f comme densité ; on note F_Z sa fonction de répartition.

2. Expliciter $F_Z(x)$ pour tout réel x .

Z étant à densité, sa fonction de répartition sera continue sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \leq -1, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$; notamment $F(-1) = 0$.
- $\forall x \in [-1, 0], F(x) = F(-1) + \int_{-1}^x \frac{a}{2}(1+t)^{a-1} dt = \frac{a}{2} \left[\frac{(1+t)^a}{a} \right]_{-1}^x = \frac{a}{2} \frac{(1+x)^a}{a} = \frac{(1+x)^a}{2}$;
notamment $F(0) = \frac{1}{2}$.
- $\forall x \in [0, 1], F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{a}{2}(1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \left[\frac{(1-t)^a}{a} \right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{(1-x)^a}{a} \right) =$
 $\frac{1}{2} - \frac{(1-x)^a}{2}$; notamment $F(1) = 1$.
- $\forall x \geq 1, F(x) = F(1) + \int_1^{+\infty} 0 dt = 1$

Finalement :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{(1+x)^a}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^a}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On considère maintenant la variable aléatoire $X = |Z|$. On note F_X la fonction de répartition de X .

3. (a) Déterminer la loi de X .

f étant nulle hors de $[-1, 1]$ on a $Z(\Omega) = [-1, 1]$ et donc $X(\Omega) = [0, 1]$.

On en déduit $F_X(x) = 0$ si $x < 0$, et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.

Ensuite :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(|Z| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq Z \leq x) \quad (\text{avec } x \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(-x < Z \leq x) \quad (Z \text{ à densité}) \\ &= F(x) - F(-x) \\ &= 1 - \frac{(1-x)^a}{2} - \left(-\frac{(1-x)^a}{2} \right) \quad (\text{avec } x \in [0, 1] \text{ et } -x \in [-1, 0]) \\ &= 1 - (1-x)^a \end{aligned}$$

Finalement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^a & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Montrer que X est à densité, et qu'une densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x)^{a-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin]0, 1[\end{cases}$$

F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (composée de $\mathcal{C}^1$) ; les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - (1-x)^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - (1-x)^a = 1$$

permettent d'obtenir la continuité en 0 et en 1, et donc sur $\mathbb{R}$.

On trouve une densité de X en dérivant F_X sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a(1-x)^{a-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et en posant $f_X(0) = f_X(1) = 0$ on l'expression demandée.

On se propose de déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X . Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

4. (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x .

Soit $x \geq 0$: on écrit

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -x) \\ &= P(\ln(1-X) \geq e^{-x}) \quad \text{par stricte croissance de exp} \\ &= P(1-X \geq e^{-x}) \\ &= P(X \leq 1 - e^{-x}) \\ &= F(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

Or $x \geq 0$, donc $1 - e^{-x} \in [0, 1[$, donc $F(1 - e^{-x}) = 1 - (1 - (1 - e^{-x}))^a = 1 - e^{-ax}$ d'après l'expression de F trouvée en question 3a.

(b) **En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a .**

G est la fonction de répartition de $-\ln(1-X)$.

f étant nulle hors de $[0, 1]$, on a $X(\Omega) = [0, 1[$; sur cet intervalle $-\ln(1-X) \geq 0$.

Donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$; et $\forall x < 0$, $G(x) = 0$.

On a donc

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et on constate que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

5. (a) **Montrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a .**

Par théorème de transfert, e^{-Y} admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} g(y) dy$ converge absolument, où g est une densité de $\mathcal{E}(a)$. Or, avec $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} g(y) dy = a \int_0^{+\infty} e^{-y} e^{-ay} dy = a \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)y} dy$$

et cette dernière intégrale converge bien absolument car $a+1 > 0$.

On trouve alors

$$\mathbb{E}(e^{-Y}) = a \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)y} dy = \frac{a}{a+1}$$

avec la question précédente.

(b) **Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a .**

$Y = -\ln(1-X)$ donne $X = 1 - e^{-Y}$.

e^{-Y} admet une espérance, donc X également, et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1 - e^{-Y}) = 1 - \mathbb{E}(e^{-Y}) = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}$$

(c) **Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}(e^{-2Y}) = \frac{a}{a+2}$. En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X .**

Par le même calcul qu'en 5a :

$$\mathbb{E}(e^{-2Y}) = a \int_0^{+\infty} e^{-(a+2)y} dy = \frac{a}{a+2}$$

On a alors $V(e^{-Y}) = \mathbb{E}\left((e^{-Y})^2\right) - \mathbb{E}(e^{-Y})^2 = \frac{a}{a+2} - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 = \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}$.
 Enfin, avec $X = 1 - e^{-Y}$, on a $V(X) = V(e^{-Y}) = \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}$.

6. On considère enfin une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant toutes la loi de X.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. On note H_n la fonction de répartition de I_n .

(a) Montrer que, pour tout réel x : $H_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$.

Vu 10000 fois.

(b) En déduire la fonction de répartition de I_n ; puis, sans calcul mais en utilisant ce qui précède, l'espérance et la variance de I_n .

Avec

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^a & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

on a en remplaçant :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{na} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et on voit que la loi de I_n est de la forme de celle de X, en remplaçant le paramètre a par na .

Il suffit alors de remplacer dans les expressions de $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$:

$$\mathbb{E}(I_n) = \frac{1}{na+1} \quad \text{et} \quad V(I_n) = \frac{na}{(na+2)(na+1)^2}$$

(c) Déterminer, pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x)$. On a immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et pour $x \in [0, 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - ((1-x)^a)^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |1-x|^a < 1 \\ 0 & \text{si } (1-x)^a = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En récapitulant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ça ressemble à la fonction de répartition de la variable constante égale à 0 ; mais cette dernière est :

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et est discontinue en 0.

Ce qui précède montre en fait que :

$$\forall x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = F_0(x)$$

ce qui avec la discontinuité en 0 suffit à montrer que $I_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Exercice 2 : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, I_2, \dots, I_n$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose les T_k mutuellement indépendantes. On notera F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et f une densité de cette même loi.

1. Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On admet que les conditions de l'expérience permettent de supposer les B_k indépendantes.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.

- (a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?

Pour tout k , B_k vaut 1 si l'invité est là à l'instant t , et 0 s'il n'est pas encore arrivé. S_t compte donc le nombre d'invités qui sont déjà arrivés à l'instant t .

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi de la variable B_k .

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_k est une variable de Bernoulli car à valeurs dans $\{0, 1\}$; de plus $\mathbb{P}(B_k = 1) = \mathbb{P}(T_k \leq t) = t$, car $T_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $t \in [0, 1]$ (expression de la fonction de répartition d'une var suivant $\mathcal{U}([0, 1])$).

- (c) En déduire la loi de la variable aléatoire S_t .

S_t est une somme de variables de Bernoulli indépendantes, qui sont, d'après ce qui précède, de même paramètre t . On en déduit que $S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, t)$.

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

- (a) Que vaut $R_1(\Omega)$?

D'après l'énoncé chaque invité arrive à un instant dans $[0, 1]$: $R_1(\Omega) = [0, 1]$.

- (b) Soit un réel t appartenant à $[0, 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.

On a $R_1 > t$ ssi le premier invité arrive strictement après t ; de manière équivalente, ssi aucun invité n'est encore arrivé à l'instant t ; donc ssi $S_t = 0$.

On a donc : $(R_1 > t) = (S_t = 0)$.

(c) **Déterminer la fonction de répartition de R_1 (qu'on notera F_1).**

Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

R_1 étant à valeurs dans $[0, 1]$, F_1 est nulle sur $] -\infty, 0[$, et vaut 1 sur $[1, +\infty[$.

$\forall t \in [0, 1]$, $F_1(t) = \mathbb{P}(R_1 \leq t) = 1 - \mathbb{P}(R_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(S_t = 0) = 1 - (1 - t)^n$.

Cette fonction de répartition est bien continue sur $\mathbb{R}$ (car $1 - (1 - t)^n$ tend vers 0 en 0^+ et vers 1 en 1^-), et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1. R_1 est donc à densité ; on en trouve une densité en dérivant F_1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On obtient une densité f_1 donnée par

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n(1 - t)^{n-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et on complète en posant par exemple $f_1(0) = f_1(1) = 0$.

3. **Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.**

Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

C'est similaire à la méthode précédente. $R_2 > t$ ssi, à l'instant t , on a au plus un invité arrivé ; donc ssi $S_t \leq 1$. On a donc $\mathbb{P}(R_2 > t) = \mathbb{P}(S_t = 0) + \mathbb{P}(S_t = 1) = (1 - t)^n + nt(1 - t)^{n-1}$ (loi binomiale) ; donc

$$\forall t \in [0, 1], \mathbb{P}(R_2 \leq t) = 1 - (1 - t)^n - nt(1 - t)^{n-1}$$

Par les mêmes arguments, R_2 est à densité, et on obtient une densité g donnée par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ n(1 - t)^{n-1} + n(n - 1)t(1 - t)^{n-2} - n(1 - t)^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

ou après un peu de simplification :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ n(n - 1)t(1 - t)^{n-2} & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$