

Variables aléatoires à densité

Un exercice supplémentaire

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à densité, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f , la fonction de répartition et une densité de X . On suppose f continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$.
(b) Montrer : $\forall x \geq 0, \int_x^{+\infty} t f(t) dt \geq x(1 - F(x)) \geq 0$.
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$.
3. On considère maintenant $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n .
 - (a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.
 - (b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.
 - (c) Pour $n \geq 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1} (1 - F(t)) dt$.
 - (d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m . Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

1. (a) **Justifier la convergence de l'intégrale** $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$.

X admet une espérance donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument ; donc converge ; et donc $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge aussi.

- (b) **Montrer :** $\forall x \geq 0, \int_x^{+\infty} t f(t) dt \geq x(1 - F(x)) \geq 0$.

$\forall t \geq x$ on a en multipliant par $f(t) \geq 0$: $t f(t) \geq x f(t)$; soit en intégrant sur $[x, +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} t f(t) dt \geq \int_x^{+\infty} x f(t) dt$$

(on vient de voir que $\int_x^{+\infty} t f(t) dt$ converge ; et $\int_x^{+\infty} x f(t) dt = x \int_x^{+\infty} f(t) dt$ converge comme intégrale de la densité).

Or :

$$\int_x^{+\infty} x f(t) dt = x \int_x^{+\infty} f(t) dt = x \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$$

ce qui donne la première inégalité.

$x \geq 0$ et $F(x) \leq 1$ (fonction de répartition), donc $x(1 - F(x)) \geq 0$.

- (c) **En déduire que** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

On vise un théorème des gendarmes : montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} t f(t) dt \right)$.

C'est le cas car il s'agit du « reste » d'une intégrale convergente (mais ceci est à redémontrer) : si on fixe $a > 0$, on a

$$\int_x^{+\infty} t f(t) dt = \int_a^{+\infty} t f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} t f(t) dt - \int_a^{+\infty} t f(t) dt = 0$$

Le théorème des gendarmes s'applique donc à l'encadrement de 1b, et on conclut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$$

2. **Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :** $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$.

Soit $A > 0$. f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, F y est $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. X étant à valeurs positives, f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt$$

On procède à l'IPP avec $t \mapsto F(t) - 1$ comme primitive de f (ASTUCE !!) et $t \mapsto 1$ comme dérivée de $t \mapsto t$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^A t f(t) dt &= \left[t(F(t) - 1) \right]_0^A - \int_0^A (F(t) - 1) dt \\ \int_0^A t f(t) dt &= A(F(A) - 1) + \int_0^A (1 - F(t)) dt \end{aligned}$$

À la limite $A \rightarrow +\infty$ dans cette dernière expression :

- $\int_0^A t f(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \mathbb{E}(X)$
- $A(F(A) - 1) \rightarrow 0$ d'après 1c ;

ce qui montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$ converge, et que

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \mathbb{E}(X)$$

3. On considère maintenant $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n .

- (a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

$$G_n = F^n \text{ vu } 10000 \text{ fois.}$$

- (b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

On commence par obtenir une densité de Z_n . F est $\mathcal{C}^1$ de dérivée f , donc en dérivant $G_n : t \mapsto (F(t))^n$ est également $\mathcal{C}^1$: Z_n est à densité.

En dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G'_n(t) = nF'(t)(F(t))^{n-1} = nf(t)(F(t))^{n-1}$$

On examine donc la convergence de

$$\int_0^{+\infty} nt f(t)(F(t))^{n-1} dt$$

(on intègre sur $\mathbb{R}_+$ car les variables sont positives).

La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$nt f(t)(F(t))^{n-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} nt f(t)$$

car $F(t)^{n-1} \rightarrow 1$ (fonction de répartition !).

$\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} nt f(t)(F(t))^{n-1} dt$ converge. Z_n admet donc une espérance.

- (c) Pour $n \geq 2$, montrer que: $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1} (1 - F(t)) dt$.

La question 2 montre que

$$\mathbb{E}(Z_n) = \int_0^{+\infty} (1 - G_n(t)) dt = \int_0^{+\infty} (1 - (F(t))^n) dt$$

d'où assez rapidement et par linéarité de l'intégrale :

$$\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1} (1 - F(t)) dt$$

- (d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m . Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En utilisant l'expression de F valable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall k \geq 2, \mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_{k-1}) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-mt})^{k-1} e^{-mt} dt$$

et on reconnaît une expression de la forme $u' \times u^{k-1}$: avec $A \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A (1 - e^{-mt})^{k-1} e^{-mt} dt &= -\frac{1}{km} \left[(1 - e^{-mt})^k \right]_0^A \\ &= \frac{1}{km} \left(1 - (1 - e^{-mA})^k \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{km} \end{aligned}$$

d'où $\forall k \geq 2, \mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_{k-1}) = \frac{1}{km}$.

En sommant pour $k = 2..n$ et avec un télescopage :

$$\forall n \geq 2, \mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

Or $Z_1 = X_1$ suit la loi $\mathcal{E}(m)$ donc $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{m}$; de sorte que

$$\forall n \geq 2, \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Il est $\pm$ classique que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$; finalement

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{m}$$