

## Concours Blanc n°2 – ESSEC1 2012

11/03/2026

Durée : 4h

Ce problème comporte trois parties relativement indépendantes.

Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique. Dans la troisième partie, on établit la formule de Black et Scholes, pour le prix d'une option dans le modèle limite obtenu dans la partie II.

### Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
- On note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement  $E(X)$  et  $V(X)$  l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $X$ , lorsque celles-ci existent.

Soit  $m$  un réel et  $\sigma$  un réel strictement positif.  
On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi log-normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$  si  $X$  est à valeurs strictement positives et si  $\ln(X)$  suit la loi normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$ . On écrit alors  $X \hookrightarrow \text{LN}(m, \sigma^2)$ .

### Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie  $m$  un réel et  $\sigma$  un réel strictement positif.

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$ .

On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire  $Y = \ln(X)$ .

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a$  étant différent de 0. On rappelle que si  $U$  est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$ , alors  $aU + b$  suit aussi une loi normale. Quels en sont les paramètres ?

Cours !  $aU + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$ .

2. Cas où  $m = 0$ .

On suppose dans cette question 2 que  $X \hookrightarrow \text{LN}(0, \sigma^2)$ .

(a) *Espérance.*

- i. Montrer que, sous réserve d'existence de cette espérance,  $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy$ .

On a  $\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ; si on note  $Y = \ln(X)$  on cherche alors  $E(X) = E(e^Y)$  et on considère l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_Y(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy$$

qui d'après le théorème de transfert vaudra bien  $E(X)$  en cas de cv. absolue.

- ii. En utilisant le changement de variable  $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$ , montrer l'existence de  $E(X)$  et montrer que  $E(X) = e^{\sigma^2}$ .

Le changement est affine donc s'opère directement sur l'intégrale impropre (toujours sous réserve de cv).

On a  $y = \sigma t + \sigma$ ,  $dy = \sigma dt$ ; les bornes sont inchangées; et

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\sigma t + \sigma)^2 - 2(\sigma t + \sigma^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 - \sigma^2\right)\right) \\ &= e^{-t^2/2} e^{\sigma^2/2}\end{aligned}$$

d'où avec le changement de variable

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{\sigma^2/2} \sigma dt \\ &= e^{\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt\end{aligned}$$

On reconnaît l'intégrale de la densité usuelle de la loi normale centrée réduite, qui converge et vaut 1; donc  $E(X)$  existe, et

$$E(X) = e^{\sigma^2/2}$$

(b) **Variance.**

i. **Soit  $\alpha$  un réel non nul. Montrer que  $X^\alpha$  suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.**

$X$  suit  $LN(0, \sigma^2)$  donc  $\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Mais dans ce cas,  $\ln(X^\alpha) = \alpha \ln(X)$  suit  $\mathcal{N}(0, \alpha^2 \sigma^2)$  par propriété de la loi normale; et donc par définition  $X^\alpha$  suit  $LN(0, \alpha^2 \sigma^2)$ .

ii. **En déduire que  $X$  admet une variance et que  $V(X) = e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ .**

Notamment pour  $\alpha = 2$ :  $X^2 \hookrightarrow LN(0, 4\sigma^2)$  donc d'après la question précédente,  $E(X^2)$  existe (donc  $X$  admet une variance), et

$$E(X^2) = e^{4\sigma^2/2} = e^{2\sigma^2}$$

et donc par KH:

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = e^{2\sigma^2} - \left(e^{\sigma^2/2}\right)^2 \\ &= e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2} \\ \Rightarrow V(X) &= e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)\end{aligned}$$

(c) **Densité.**

**Exprimer la fonction de répartition  $F$  de  $X$  en fonction de  $\Phi$ .**

**En déduire que  $X$  est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par**

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**est une densité de probabilité de  $X$ .**

Soit  $X \hookrightarrow LN(0, \sigma^2)$ .

Par définition,  $X$  est donc à valeurs  $> 0$ , d'où:

$$\forall x \leq 0, F(x) = 0$$

Soit  $x > 0$ : on a cette fois  $F(x) = P(X \leq x) = P(\ln(X) \leq \ln(x))$  (stricte croissance de  $\ln$ ) et on sait que  $\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ; donc  $\frac{\ln(X)}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . On en déduit

$$F(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\ln(X)}{\sigma} \leq \frac{\ln(x)}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right)$$

Finalement: 
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F est donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  comme composée de telles fonctions ; de plus

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right)}_{\rightarrow -\infty} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \Phi(y) = 0$$

donc F est continue en 0, et X est bien à densité.

En dérivant F sur  $\mathbb{R}^*$ , et en posant  $f(0) = 0$ , on obtient la densité :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \leq 0 \\ &= \frac{1}{x\sigma} \Phi'\left(\frac{\ln x}{\sigma}\right) \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

or  $\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$  (densité usuelle de  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) Finalement une densité de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

### 3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \text{LN}(m, \sigma^2)$ .

(a) Soit  $\mu$  un réel strictement positif.

Montrer que  $\mu X$  suit une loi log-normale de paramètres  $(m + \ln(\mu), \sigma^2)$ .

$\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  par hypothèse.

$\ln(\mu X) = \ln(\mu) + \ln(X)$ , donc d'après les propriétés de  $\mathcal{N}$  :  $\ln(\mu X) \hookrightarrow \mathcal{N}(m + \ln(\mu), \sigma^2)$

et X suit bien une loi LN de paramètres  $(m + \ln \mu, \sigma^2)$ .

(b) Justifier l'existence de  $E(X)$ , de  $V(X)$ , et établir :

$$E(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad V(X) = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

On cherche à utiliser ce qui précède, donc à se ramener à une variable d'espérance nulle.

Soit donc  $\mu$  tq  $m + \ln(\mu) = 0$  ; donc  $\mu = e^{-m}$ .

$e^{-m}X \hookrightarrow \text{LN}(0, \sigma^2)$  donc avec la lin. de l'esp.

$$E(e^{-m}X) = e^{\sigma^2/2} = e^{-m}E(X)$$

donc  $E(X) = e^{m + \sigma^2/2}$ .

et de même

$$V(e^{-m}X) = e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = e^{-2m}V(X)$$

donc  $V(X) = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ .

### 4. Soit $n$ un entier naturel non nul.

On cherche, à l'aide de tirages de X, à estimer les paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ .

On considère donc  $(X_1, \dots, X_{2n})$ ,  $2n$  variables aléatoires indépendantes suivant la loi log-normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$ . On pose

$$Z_n = X_1 \times \dots \times X_{2n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{X_1 \times \dots \times X_n}{X_{n+1} \times \dots \times X_{2n}}.$$

(a) Montrer que  $E\left(\frac{1}{2n} \ln(Z_n)\right) = m$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{2n} \ln(Z_n) = \frac{1}{2n} \ln\left(\prod_{i=1}^{2n} X_i\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \ln(X_i)$$

Comme  $X_i \hookrightarrow \text{LN}(m, \sigma^2)$ ,  $\ln(X_i) \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  donc

$$\forall i \in [1, 2n], \mathbf{E}(\ln(X_i)) = m$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{2n} \ln(Z_n)\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} m = m$$

(b) **Montrer que**  $\mathbf{E}\left(\frac{1}{2n} (\ln(T_n))^2\right) = \sigma^2$ .

C'est le même principe :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{1}{2n} (\ln(T_n))^2\right) &= \frac{1}{2n} \mathbf{E}\left(\left(\frac{\prod_{i=1}^n X_i}{\prod_{i=n+1}^{2n} X_i}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2n} \mathbf{E}\left(\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) - \ln\left(\prod_{i=n+1}^{2n} X_i\right)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right)^2\right) - 2\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right)\left(\sum_{i=n+1}^{2n} \ln(X_i)\right)\right) + \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=n+1}^{2n} \ln(X_i)\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

On note  $Y_i = \ln(X_i) \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Les  $Y_i$  sont indépendantes par lemme des coalitions ; et pas stabilité de la loi normale :

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \hookrightarrow \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$$

$$Z_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(x_i) \hookrightarrow \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{1}{2n} (\ln(T_n))^2\right) &= \frac{1}{2n} (\mathbf{E}(Z_1^2) - 2\mathbf{E}(Z_1 Z_2) + \mathbf{E}(Z_2^2)) \\ &= \frac{1}{2n} (\mathbf{V}(Z_1) + \mathbf{E}(Z_1)^2 - 2\mathbf{E}(Z_1)\mathbf{E}(Z_2) + \mathbf{V}(Z_2) + \mathbf{E}(Z_2)^2) \quad Z_1, Z_2 \text{ indép (encore coalitions)} \\ &= \frac{1}{2n} (\mathbf{V}(Z_1) + \mathbf{V}(Z_2) + \underbrace{(\mathbf{E}(Z_1) - \mathbf{E}(Z_2))^2}_{=0}) \\ &= \frac{1}{2n} (\mathbf{V}(Z_1) + \mathbf{V}(Z_2)) \\ &= \frac{1}{2n} (2n\sigma^2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

## Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et  $t$  fixé, strictement positif. On suppose qu'initialement ce cours est  $S_{0,n} = 1$  et si l'on note  $S_{k,n}$  la valeur aléatoire de ce cours à la date  $\frac{kt}{n}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{\sqrt{n}} Y_k\right), \quad \text{où}$$

- $\mu$  est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à  $t$  ;
- $\nu$  est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée  $t$  ;
- $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  (autrement dit,  $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$ ).

On suppose que  $n$  est assez grand pour que  $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$ .

On admet que  $S_{0,n}, \dots, S_{n,n}$  sont des variables aléatoires discrètes.

On note  $C_n$  la variable aléatoire  $S_{n,n}$ , qui modélise le cours de l'action à l'instant  $t$ .

5. (a) Calculer l'espérance et la variance commune aux  $Y_k$ .

$$\mathbf{E}(Y_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

$Y_k^2$  est constante égale à 1 ; donc

$$\mathbf{V}(Y_k) = \mathbf{E}(Y_k^2) - \mathbf{E}(Y_k)^2 = 1 - 0 = 1$$

- (b) i. **Montrer l'égalité :**  $C_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k \right)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé.

On montre par récurrence sur  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$S_{k,n} = \prod_{i=1}^k \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_i \right)$$

(avec la convention  $\prod_{i=1}^0 [\dots] = 1$ ).

La propriété est vraie pour  $k = 0$  avec  $S_{0,n} = 1$  ; et si on a  $S_{k,n} = \prod_{i=1}^k \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_i \right)$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , alors

$$\begin{aligned} S_{k+1,n} &= \left( \prod_{i=1}^k \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_i \right) \right) \times \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_{k+1} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_i \right) \end{aligned}$$

ce qui établit l'hérédité et la propriété souhaitée.

Enfin, on a

$$C_n = S_{n,n} = \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_i \right)$$

- ii. **En déduire que**  $\mathbf{E}(C_n) = \left( 1 + \frac{\mu}{n} \right)^n$  **et**  $\mathbf{V}(C_n) = \left( \left( 1 + \frac{\mu}{n} \right)^2 + \frac{v^2}{n} \right)^n - \left( 1 + \frac{\mu}{n} \right)^{2n}$ .

Par indépendance des  $Y_k$ , et lemme des coalitions, les variables  $\left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_n \right)$  sont indépendantes. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(C_n) &= \prod_{k=1}^n \mathbf{E} \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} \underbrace{\mathbf{E}(Y_k)}_{=0} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\mu}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Ensuite:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(C_n^2) &= \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\mathbf{V}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right) + \mathbf{E}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{v^2}{n} \mathbf{V}(Y_k) + \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{v^2}{n} + \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2\right) \\
 \mathbf{E}(C_n^2) &= \left(\frac{v^2}{n} + \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2\right)^n
 \end{aligned}$$

et enfin

$$\mathbf{V}(C_n) = \mathbf{E}(C_n^2) - \mathbf{E}(C_n)^2 = \left(\frac{v^2}{n} + \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}$$

(c) **Déterminer**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(C_n)$  **et montrer que**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(C_n) = e^{2\mu} (e^{v^2} - 1)$ .

**Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.**

Classique (à redémontrer):  $\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\mu$ ; donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(C_n) = e^\mu$$

De même:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n\right)^2 = (e^\mu)^2 = e^{2\mu}$$

Enfin, de manière similaire :

$$\left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2\mu}{n} + \frac{v^2}{n} + \frac{\mu^2}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{2\mu + v^2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(C_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v^2}{n} + \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n} \\
 &= e^{2\mu + v^2} - e^{2\mu} \\
 &= e^{2\mu} (e^{v^2} - 1)
 \end{aligned}$$

Or on a vu que si  $X \hookrightarrow \text{LN}(m, \sigma^2)$  alors :

$$\mathbf{E}(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

On cherche donc  $m$  et  $\sigma^2$  tels que  $m + \frac{\sigma^2}{2} = \mu$ , et  $v^2 = \sigma^2$ .

Donc  $\sigma^2 = v^2$ ,  $m = \mu - \frac{v^2}{2}$  et la loi recherchée est

$$\text{LN}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$$

## 6. Simulation de la variable aléatoire $C_n$ .

(a) **Quelles sont les valeurs que peut prendre l'expression Python :**

```
2*rd.randint(0,2)-1
```

`randint(0,2)` renvoie un entier de  $\{0,1\}$  équiréparti ; donc  $2*\text{rd.randint}(0,2)-1$  renvoie 1 ou -1 de manière équiprobable.

C'est donc un outil permettant de simuler un tirage aléatoire de  $Y_k$ .

- (b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les ... par des expressions Python pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire  $C_n$ .

```
def C(n,mu,v):
    C = 1
    for k in range(n):
        C = C * (1+mu/n + v/np.sqrt(n)*(2*rd.randint(0,2)-1))
    return C
```

7. (a) Expliciter un couple de réels  $(a_n, b_n)$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right) = a_n + b_n Y_k.$$

Il faut se rappeler que  $Y_n$  vaut 1 ou -1.

On cherche donc  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) &= a_n + b_n \\ \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) &= a_n - b_n. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2} \left( \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

- (b) En déduire que  $\ln(C_n) = na_n + b_n \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Avec 7a et 5(b)i :

$$\begin{aligned} \ln(C_n) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_n + b_n Y_k) \\ \ln(C_n) &= na_n + b_n \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{en découpant la somme} \end{aligned}$$

- (c) Établir la convergence en loi, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \dots + Y_n)$  vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

C'est clairement le TCL... donc il faut obtenir les moyennes centrées réduites  $Y_k^*$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \text{ a pour espérance } \mathbf{E}(Y_n) = 0 \text{ et pour variance } \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{n} = \frac{1}{n}.$$

$$\text{D'où en normalisant : } Y_n^* = \frac{\bar{Y}_n - \mathbf{E}(\bar{Y}_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(\bar{Y}_n)}} = \frac{\bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n} \bar{Y}_n$$

On trouve finalement :

$$Y_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k$$

Les  $Y_k$  admettant des variances, le TCL permet d'affirmer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{N} \quad \text{où } \mathbf{N} \hookrightarrow \mathbf{N}(0, 1)$$

8. (a) **Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  au voisinage de 0.**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- (b) **Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions  $x \mapsto \ln(1+vx+\mu x^2)$  et  $x \mapsto \ln(1-vx+\mu x^2)$ .**

On en déduit

$$\begin{aligned} \ln(1 + \underbrace{vx + \mu x^2}_{\rightarrow 0}) &= (vx + \mu x^2) - \frac{1}{2}(vx + \mu x^2)^2 + o(x^2) \\ &= vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}v^2 x^2 + [\text{termes } o(x^2)] \\ &= vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

et en remplaçant  $v$  par  $-v$  (petite astuce pour gagner du temps !) :

$$\ln(1 - vx + \mu x^2) = -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)$$

- (c) **Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \mu - \frac{v^2}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}b_n = v$ .**

**En déduire que  $b_n$  est strictement positif à partir d'un certain rang.**

**On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.**

On utilise ces DLs dans les expressions de  $a_n$  et  $b_n$  avec  $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} na_n &= \frac{n}{2} \left( \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= \frac{n}{2} \left( \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{n}{2} \left( \frac{2}{n} \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \mu - \frac{v^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = \mu - \frac{v^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{n}b_n &= \frac{\sqrt{n}}{2} \left( \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2} \left( \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2} \left( \frac{2v}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= v + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}b_n = v$$

À partir d'un certain rang,  $\sqrt{n}b_n > 0$  (car tend vers  $v > 0$ ) donc  $b_n > 0$ .

9. **On note  $F_n$  la fonction de répartition de  $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \dots + Y_n)$  et  $G_n$  la fonction de répartition de  $\ln(C_n)$ .**

**Soit  $x$  un réel. On pose  $y = \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$ .**

(a) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

i. Établir l'existence d'un réel  $\eta$  strictement positif tel que

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(y - \eta) \leq \Phi(y + \eta) \leq \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\lim_{z \rightarrow 0} \Phi(y + z) = \Phi(y)$  par continuité de  $\Phi$  ; donc par  $\eta > 0$  assez petit, on a

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(y - \eta) \leq \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(y + \eta) \leq \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus,  $\Phi$  étant croissante, et  $\eta > 0$ , on a aussi

$$\Phi(y - \eta) \leq \Phi(y + \eta)$$

ii. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_1$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$  :

$$y - \eta \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{nb_n}} \leq y + \eta.$$

Avec les limites de 8c :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x - na_n}{\sqrt{nb_n}} = \frac{x - \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}{v} = y$$

d'où par définition de la limite : il existe  $n_1$  tq

$$\forall n \geq n_1, \quad y - \eta \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{nb_n}} \leq y + \eta$$

iii. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_2$  tel que, pour tout  $n \geq n_2$  :

$$F_n(y + \eta) \leq \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geq \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$F_n$  est la fonction de répartition de  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$  donc par définition de la cv en loi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

Toujours par définition de la limite  $n \rightarrow +\infty$  (aux points  $y \pm \eta$ )

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq m_1, \quad F_n(y + \eta) \leq \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists m_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq m_2, \quad F_n(y - \eta) \geq \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

en posant  $n_2 = \max(m_1, m_2)$  on assure que pour  $n \geq n_2$ , les deux inégalités ci-dessus sont simultanément vérifiées.

iv. Montrer que  $G_n(x) = F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{nb_n}}\right)$ , et en déduire que, pour  $n$  assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbb{P}(\ln(C_n) \leq x) = \mathbb{P}\left(na_n + b_n \sum_{k=1}^n Y_k \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n Y_k \leq \frac{x - na_n}{b_n}\right) \quad (\text{avec } b_n > 0 \text{ par hypothèse}) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \\
G_n(x) &= F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \quad \text{car } F_n \text{ est la fonc rép. de } \frac{1}{\sqrt{n}} \sum Y_k
\end{aligned}$$

On enchaîne ensuite nos inégalités :  
(en supposant  $n \geq n_1$  et  $n \geq n_2$ )

$$\begin{aligned}
G_n(x) = F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) &\leq F_n(y + \eta) \quad (\text{croissance de } F_n) \\
&\leq \Phi(y + \eta) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \Phi(y) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_n(x) = F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) &\geq F_n(y - \eta) \quad (\text{croissance de } F_n) \\
&\geq \Phi(y - \eta) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \Phi(y) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Finalement  $\Phi(y) - \varepsilon \leq G_n(x) \leq \Phi(y) + \varepsilon$  et on a donc bien  $|G_n(x) - \Phi(y)| \leq \varepsilon$ .

et on a bien le résultat avec  $y = \frac{x - \mu + v^2/2}{v}$

- (b) **En conclure que la suite de variables aléatoires  $(\ln(C_n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.**

On vient de voir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)$$

et  $x \mapsto \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)$  est la fonction de rép. de... quelle loi normale ?

Si  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , on sait que  $\frac{Z - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . donc

$$\forall x, F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{Z - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Donc, par identification,  $x \mapsto \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right)$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$ .

Conclusion :  $(\ln(C_n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres  $\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$ .

10. **Démontrer que  $(C_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres  $\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$ .**

Ce n'est pas immédiat ! Examinons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n \leq x)$ .

Si  $x \leq 0$  on a déjà  $\mathbb{P}(C_n \leq x) = 0 \rightarrow 0$  car  $C_n$  est à valeurs  $> 0$ .

Soit maintenant  $x > 0$ . On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n \leq x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\ln(C_n) \leq \ln(x)) \\
&= \mathbb{P}(N \leq \ln(x)) \quad \text{où } N \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)
\end{aligned}$$

Or si  $X \hookrightarrow \text{LN}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$  :  $F_X(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ ; et si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(\ln(X) \leq \ln(x)) \\ &= \mathbb{P}(N \leq \ln(x)) \quad \text{car } N = \ln(X) \text{ suit } \mathcal{N}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)\end{aligned}$$

On voit donc que pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  ; et on a bien  $C_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

## Partie III - La formule de Black et Scholes

Soit  $t$  un réel strictement positif.

À la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est  $t$  et le prix d'exercice  $K$ , un réel strictement positif.

- Si à la date  $t$ , le cours  $C$  de l'action est supérieur ou égal à  $K$ , il peut acheter l'action au prix  $K$  et la revendre au prix  $C$  ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date  $t$ .

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note  $\pi_K$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0 c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1.
- Le cours de l'action à la date  $t$  est une variable aléatoire  $C$  qui suit une loi log-normale de paramètres  $(m, v^2)$ .
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et  $t$  vaut  $e^r - 1$ , où  $r$  est un réel strictement positif.
- On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par, pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \max(0, x)$ .

11. (a) Justifier que la valeur de l'option à la date  $t$  est  $f(C - K)$ .

$f(x)$  vaut donc  $x$  si  $x \geq 0$ , et 0 si  $x < 0$ .

D'après le modèle exposé :

- Si  $C \geq K$  (ie.  $C - K \geq 0$ ) on achète à  $K$  et on revend à  $C$ , donc on empoche  $C - K$  : la valeur de l'option est  $C - K$ .
- Si  $C < K$  (ie.  $C - K < 0$ ) l'option vaut 0.

On voit dans les deux cas que la valeur de l'option est  $f(C - K)$ .

- (b) Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat  $\pi_K$  sur l'actif non risqué, quel serait la valeur de son placement à la date  $t$  ?

Le placement du bon père de famille au prix  $\pi_K$  rapporte  $\pi_K (e^r - 1)$  d'après le taux de rentabilité.

- (c) En déduire qu'il convient de poser  $\pi_K = e^{-r} \mathbb{E}(f(C - K))$  si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.

... et l'option vaut en moyenne  $\mathbb{E}(f(C - K))$  ; donc rapporte  $\mathbb{E}(f(C - K)) - \pi_K$

On a la même rentabilité moyenne ssi

$$\begin{aligned}\pi_K (e^r - 1) &= \mathbb{E}(f(C - K)) - \pi_K \Leftrightarrow \pi_K e^r = \mathbb{E}(f(C - K)) \\ &\Leftrightarrow \pi_K = e^{-r} \mathbb{E}(f(C - K))\end{aligned}$$

Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de  $\pi_K$  que l'on utilise.

12. (a) **Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .**

$$f(x) = \max(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On voit immédiatement que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , et que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) **Établir l'existence de  $E(f(C-K))$  et l'égalité**

$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) dx.$$

Par th de transfert, et avec  $C \hookrightarrow \text{LN}(m, v^2)$  et donc  $\ln(C) \hookrightarrow \mathcal{N}(m, v^2)$ ,  $E(f(C-K))$  existe ssi l'intégrale suivante existe :

$$E(f(C-K)) = E\left(f\left(e^{\ln(C)} - K\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx$$

On a

$$\begin{aligned} f(e^x - K) = 0 &\Leftrightarrow e^x - K \leq 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \leq K \\ &\Leftrightarrow x \leq \ln(K) \end{aligned}$$

et si  $x > \ln(K)$  alors  $f(e^x - K) = e^x - K$ . Donc toujours sous réserve de cv on a en fait :

$$E(f(C-K)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^2} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^x - K) e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx$$

La fonction à intégrer étant continue sur  $[\ln(K), +\infty[$ , il suffit d'examiner la cv (absolue, mais tout est positif) de cette intégrale.

Appelons donc Riemann !

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^x - K) e^{-(x-m)^2/2v^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(x - \frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) - Kx^2 \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{croiss.comp.})$$

donc on a bien la cv et l'existence de cette espérance.

13. (a) **Montrer l'égalité :**

$$\pi_K = \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - K e^{-r} \Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right).$$

Alors là il faut vraiment s'énervier.

$$\begin{aligned} \pi_K = e^{-r} f(C-K) &= \frac{e^{-r}}{\sqrt{2\pi}v^2} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^x - K) e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx \\ &= \frac{e^{-r}}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{x - \frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx - \frac{e^{-r}K}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx \end{aligned}$$

(les deux intégrales convergent séparément pour les mêmes raisons que dans la question précédente).

On va laisser le  $e^{-r}$  de côté et traiter les deux intégrales séparément.

La seconde est la plus « simple » : en posant  $u = \frac{x-m}{v}$ ,

$$\begin{aligned} K \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx &= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)-m}{v}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= K \mathbb{P}\left(U \geq \frac{\ln(K)-m}{v}\right) \quad \text{où } U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= K \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K)-m}{v}\right)\right) \\ &= K \Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right) \end{aligned}$$

avec  $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ .

Pour la première il faut travailler sur le contenu de l'exponentielle : on « complète le carré ».

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-m)^2}{2v^2} &= \frac{1}{2v^2} (2v^2x - x^2 + 2mx - m^2) \\ &= -\frac{1}{2v^2} (x^2 - 2(m+v^2)x + m^2) \\ &= -\frac{1}{2v^2} ((x - (m+v^2))^2 - (m+v^2)^2 + m^2) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^{x - \frac{(x-m)^2}{2v^2}} dx &= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2v^2} ((x - (m+v^2))^2 - (m+v^2)^2 + m^2)\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{1}{2v^2} ((m+v^2)^2 - m^2)\right) \times \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - (m+v^2))^2}{2v^2}\right) dx \\ &= \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)-m-v^2}{v}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) dx \quad \text{avec } u = \frac{x - (m+v^2)}{v} \\ &= \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \times \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - m - v^2}{v}\right)\right) \\ &= \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \times \Phi\left(\frac{m + v^2 - \ln(K)}{v}\right) \end{aligned}$$

En rassemblant tous les morceaux :

$$\begin{aligned} \pi_K &= e^{-r} \left( \exp\left(m + \frac{v^2}{2}\right) \times \Phi\left(\frac{m + v^2 - \ln(K)}{v}\right) - K \Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right) \right) \\ &= \exp\left(m + \frac{v^2}{2} - r\right) \times \Phi\left(\frac{m + v^2 - \ln(K)}{v}\right) - K e^{-r} \Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right) \end{aligned}$$

et là on est quand même assez contents.

- (b) **On suppose que  $m = r - \frac{v^2}{2}$ , ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.**

**Établir la formule de Black-Scholes :**

$$\pi_K = \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - K e^{-r} \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right).$$

Dans le cas donné :

- $\exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) = 1$
- $\frac{m + v^2 - \ln(K)}{v} = \frac{r + \frac{v^2}{2} - \ln(K)}{v} = \frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}$

$$\bullet \frac{m - \ln(K)}{\nu} = \frac{r - \frac{\nu^2}{2} - \ln(K)}{\nu} = \frac{r - \ln(K)}{\nu} - \frac{\nu}{2}$$

et en injectant dans 13a :

$$\pi_K = \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)$$

(Black-Scholes).

14. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut  $x$ , où  $x$  est un réel strictement positif. On pose  $\theta = r - \ln(K)$ , de sorte que le prix d'échéance vaut  $K = \exp(r - \theta)$ . On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif  $\nu$ , s'il en existe, tel que :

$$x = \Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right).$$

On définit alors la fonction  $\Psi : \nu \mapsto \Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)$  sur  $]0, +\infty[$ .

- (a) Montrer que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que pour tout  $\nu > 0$ ,

$$\Psi'(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)^2\right)$$

Dresser le tableau de variations de  $\Psi$  en y faisant figurer les limites en 0 et en  $+\infty$ .

On distinguera les cas  $\theta > 0$  et  $\theta \leq 0$ .

$\psi : \nu \mapsto \Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $\Phi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $\nu \mapsto \frac{\theta}{\nu} \pm \frac{\nu}{2}$  est bien définie et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall \nu > 0, \Psi'(\nu) = \left(-\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right)\Phi'\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right) - e^{-\theta}\left(-\frac{\theta}{\nu^2} - \frac{1}{2}\right)\Phi'\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)$$

et  $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$  (densité de  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) ; donc

$$\Psi'(\nu) = \left(-\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)^2\right) + e^{-\theta}\left(\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)^2\right)$$

Et on met encore les mains dans le cambouis :

$$\begin{aligned}\Psi'(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{\nu^2} + \theta + \frac{\nu^2}{4}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.+ \left(\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{\nu^2} - \theta + \frac{\nu^2}{4}\right) - \theta\right)\right]\end{aligned}$$

et magie, les deux exponentielles sont égales !!

$$\begin{aligned}\Psi'(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{\nu^2} + \theta + \frac{\nu^2}{4}\right)\right)\left(-\frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

donc  $\Psi'(\nu) > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme exponentielle et  $\Psi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$  ; et  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ .

Faisons la distinction suggérée (le cas  $\theta = 0$  est également à distinguer) :

- pour  $\theta > 0$  et  $\nu \rightarrow 0^+$  :

$$\Psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow +\infty} - e^{-\theta}\underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow 1 - e^{-\theta}$$

- pour  $\theta > 0$  et  $\nu \rightarrow +\infty$

$$\psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow +\infty} - e^{-\theta} \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow 1 - 0 \times e^{-\theta} = 1$$

- pour  $\theta = 0$  et  $\nu \rightarrow 0^+$  :

$$\psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow 0} - e^0 \underbrace{\Phi\left(-\frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^0 = 0$$

- pour  $\theta = 0$  et  $\nu \rightarrow +\infty$  :

$$\psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow +\infty} - e^0 \underbrace{\Phi\left(-\frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow 1 - 0 \times e^0 = 1$$

- pour  $\theta < 0$  et  $\nu \rightarrow 0^+$  :

$$\psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow -\infty} - e^{-\theta} \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow 0 - 0 \times e^{-\theta} = 0$$

- pour  $\theta < 0$  et  $\nu \rightarrow +\infty$

$$\psi(\nu) = \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow +\infty} - e^{-\theta} \underbrace{\Phi\left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu}{2}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow 1 - 0 \times e^{-\theta} = 1$$

D'où les tab var suivants :

$\theta > 0$

| $\nu$        | 0                 | $+\infty$ |
|--------------|-------------------|-----------|
| $\psi'(\nu)$ |                   | +         |
| $\psi(\nu)$  | $1 - e^{-\theta}$ | 1         |

$\theta \leq 0$

| $\nu$        | 0 | $+\infty$ |
|--------------|---|-----------|
| $\psi'(\nu)$ |   | +         |
| $\psi(\nu)$  | 0 | 1         |

- (b) **Déterminer pour quelles valeurs de  $x$  il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.**

**En conclure finalement que l'on peut définir la volatilité implicite si et seulement si :**

$$f(1 - e^{-\theta}) < x < 1.$$

Une volatilité implicite est, à  $x$  fixé, une solution de  $\psi(\nu) = x$  (d'inconnue  $\nu > 0$ )

Par lecture des tableaux de variation, et théorèmes de la bijection :

- si  $\theta \leq 0$ ,  $\forall x \in ]0, 1[$  il existe une unique volatilité implicite ;
- si  $\theta > 0$ ,  $\forall x \in ]1 - e^{-\theta}, 1[$ , il existe une unique volatilité implicite.

Comme

$$\begin{aligned} f(1 - e^{-\theta}) &= 0 \text{ si } 1 - e^{-\theta} \leq 0 & (\Leftrightarrow \theta \leq 0) \\ &= 1 - e^{-\theta} \text{ si } 1 - e^{-\theta} > 0 & (\Leftrightarrow \theta > 0) \end{aligned}$$

On en déduit que, dans tous les cas, il existe une unique volatilité implicite ssi

$$f(1 - e^{-\theta}) < x < 1$$