

Concours Blanc n°2  
Maths 1  
Corrigé

**Exercice 1**

1. Écrire les lignes d'import des packages Python `numpy`, `numpy.random`, et `matplotlib.pyplot`, sous leurs alias usuels.

*On supposera ces imports effectués tout au long du sujet.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Soit  $a$  un réel strictement positif.

2. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale  $I_n(a)$  converge et vaut  $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ .

La convergence serait facile à discuter (Riemann) mais ce n'est pas la peine de le faire car le calcul suivant justifie aussi la convergence.

Soit  $A \geq a$  ; on écrit

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{1}{t^n} dt &= \int_a^A t^{-n} dt \\ &= \left[ \frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_a^A \\ &= \frac{1}{1-n} (A^{1-n} - a^{1-n}) \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} \quad \text{car } 1-n < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$  converge, et vaut  $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ .

3. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

(a) Démontrer que  $f$  est bien une densité de probabilité.

- $a > 0$  donc on justifie assez facilement que  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  comme composée de fonctions continues ;

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = 3a^3 I_4 = 1$$

d'après l'expression obtenue pour  $I_n$ .

$f$  est donc bien une densité de probabilité.

**Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.**

(b) **Donner la fonction de répartition de  $X$ .**

$X$  admet une densité nulle sur  $] -\infty, a[$  donc  $X(\Omega) \subset [a, +\infty[$  :

$$\forall x < a, F_X(x) = 0$$

et par continuité de  $F_X$  ( $X$  est à densité) on a aussi  $F_X(a) = 0$ .

Pour  $x > a$  :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(a) + \int_a^x f(t) dt = 0 + 3a^3 \int_a^x \frac{1}{t^4} dt \\ &= 3a^3 \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_a^x \\ &= 3a^3 \left( \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3x^3} \right) \\ &= 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^3 \end{aligned}$$

Finalement :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^3 & \text{si } x > a \end{cases}$$

(c) **Démontrer que  $X$  admet une espérance et calculer cette espérance.**

On étudie la convergence absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$$

La quantité à intégrer est positive sur  $[a, +\infty[$ . On reconnaît une intégrale de Riemann convergente ( $3 > 1$ ) donc  $\mathbb{E}(X)$  existe.

De plus

$$\mathbb{E}(X) = 3a^3 I_3 = 3a^3 \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2}a$$

(d) **Démontrer que  $X$  admet une variance et que celle-ci vaut  $\frac{3a^2}{4}$ .**

On examine l'existence d'un moment d'ordre 2 ; donc la convergence absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

D'où la convergence (Riemann,  $2 > 1$ ) et

$$\mathbb{E}(X^2) = 3a^3 I_2 = 3a^3 \frac{1}{a} = 3a^2$$

puis

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{3a^2}{4}$$

4. **Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]0, 1[$ . On pose :  $Y = \frac{a}{U^{1/3}}$ .**

(a) **Déterminer**  $Y(\Omega)$ .

On a

$$0 < U \leq 1 \Leftrightarrow 0 < U^{1/3} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{U^{1/3}} \Leftrightarrow a \leq \frac{a}{U^{1/3}}$$

avec stricte croissance de  $t \mapsto t^{1/3}$ , stricte déc. de l'inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $a > 0$  ; et donc

$$Y(\Omega) = [a, +\infty[$$

(b) **Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.**

Par ce qui précède,  $F_Y$  est nulle sur  $] -\infty, a[$ .

Pour  $x \geq a$  :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(aU^{-1/3} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U^{-1/3} \leq \frac{x}{a}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U \geq \left(\frac{x}{a}\right)^{-3}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U > \left(\frac{x}{a}\right)^{-3}\right) \quad U \text{ à densité} \\ &= 1 - F_U\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-3}\right) \end{aligned}$$

Or  $x \geq a$  donc  $\left(\frac{a}{x}\right)^3 \in ]0, 1]$  et  $F_U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = \left(\frac{a}{x}\right)^3$ .

On déduit de cela :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

et  $F_Y = F_X$  ; donc X et Y suivent la même loi.

(c) **Écrire une fonction en langage Python `simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel  $a$  strictement positif et deux entiers naturels  $m$  et  $n$  non nuls, qui renvoie une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.**

À cet effet, on rappelle que si  $m$  et  $n$  sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rd.random((m,n))` renvoie une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur  $[0,1]$ , ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

Assez simplement, et car les opérations de division / puissances agissent composante par composante sur les `np.array` :

```
def simulX(a,m,n):
    U = rd.random((m,n))
    return a/U**(1/3)
```

5. (a) **Calculer**  $\mathbb{P}(X > 2a)$ .

Avec la fonction de répartition de X :

$$\mathbb{P}(X > 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{1}{8}$$

(b) **Calculer**  $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$ .

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, et l'inclusion  $[X > 6a] \subset [X > 2a]$  :

$$\mathbb{P}_{[X > 2a]}(X > 6a) = \frac{\mathbb{P}([X > 6a] \cap [X > 2a])}{\mathbb{P}(X > 2a)} = \frac{\mathbb{P}(X > 6a)}{\mathbb{P}(X > 2a)} = \frac{1 - (1 - a^3/(6a)^3)}{1/8} = \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}.$$

- (c) On suppose que la fonction Python de la question 4c a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

Dans ce script, on compte, sur un grand nombre d'expériences, le nombre de tirages de  $X > 2a$  (variable s1); puis, parmi celles-ci, le nombre de tirages de  $X > 6a$  (variable s2). Le quotient de ces deux effectifs donne la fréquence d'apparition de l'événement  $[X > 6a]$  si l'univers se restreint aux réalisations pour lesquelles  $X > 2a$  : ceci fournira donc une estimation de la probabilité conditionnelle qu'on vient de calculer. On c

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(N):
    if X[0,k] > 2*a :
        s1 = s1 + 1
        if X[0,k] > 6*a :
            s2 = s2 + 1
if s1 > 0 :
    print(s2/s1)
```

NB : une exécution de ce code renvoie

```
0.037987927565392356
```

tandis qu'on a  $\frac{1}{27} \approx 0.037037037\dots$

**On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre  $a$ .**

Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que  $X$ .

6. On pose :  $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

- (a) **Montrer que  $\mathbb{E}(V_n) = a$ .**

$V_n$  admet une espérance car les  $X_k$  en admettent une.

Par linéarité de l'espérance et avec  $\mathbb{E}(X_k) = \frac{3a}{2}$ , on a

$$\mathbb{E}(V_n) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} = a$$

- (b) **On note  $\mathbb{V}(X)$  la variance d'une variable aléatoire  $X$ .**

**Montrer que  $\mathbb{V}(V_n) = \frac{a^2}{3n}$ .**

$V_n$  est une somme de variables indépendantes admettant des variances, donc en admet une.

Par propriétés de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(V_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \left(\frac{2}{3n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \quad (\text{par indépendance des } X_k) \\ &= \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{3a^2}{4} \\ \mathbb{V}(V_n) &= \frac{a^2}{3n} \end{aligned}$$

7. On pose :  $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

- (a) **Déterminer la fonction de répartition de  $W_n$  et vérifier que  $W_n$  est bien une variable aléatoire à densité.**

cf. exos :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{W_n}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$F_X$  étant  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ,  $F_{W_n}$  l'est aussi et  $W_n$  est à densité.

En reprenant l'expression de  $F_X$  on trouve

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

- (b) **Montrer que  $W_n$  admet pour densité la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :**

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

On obtient une densité de  $W_n$  en dérivant  $F_{W_n}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  :

$$\forall x \neq a, F'_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{3na^{3n}}{x^{3n+1}} & \text{si } x > a \end{cases} = f_n(x)$$

et en posant la bonne valeur en  $a$  on trouve bien que  $f_n$  est une densité de  $W_n$ .

- (c) **Démontrer que  $W_n$  admet une espérance et calculer cette espérance. Déterminer alors l'unique réel  $\lambda_n$  dépendant de  $n$  tel que  $\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = a$ .**

$W_n$  admet une espérance ssi  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$  converge absolument, donc ssi  $3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}} dt$  converge.

On reconnaît un multiple de l'intégrale  $I_{3n}(a)$  qui converge. Donc  $W_n$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(W_n) = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1} a.$$

On « corrige » alors par un facteur pour obtenir une espérance égale à  $a$ . Avec  $\lambda_n = \frac{3n-1}{3n}$  et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = \lambda_n \mathbb{E}(W_n) = \frac{3n-1}{3n} \times \frac{3n}{3n-1} a = a$$

- (d) **Montrer que  $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$ .**

Calculs assez similaires mais il faut s'énervier un peu.

$W_n$  admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance) ssi  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$  converge absolument,

donc ssi  $3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}} dt$  converge. Une solution

On reconnaît un multiple de l'intégrale  $I_{3n-1}(a)$  qui converge. On a

$$\mathbb{E}(W_n^2) = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = \frac{3n}{3n-2} a^2.$$

puis

$$\mathbb{V}(W_n) = \mathbb{E}(W_n^2) - \mathbb{E}(W_n)^2 = \left( \frac{3n}{3n-2} - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2} \right) a^2 = \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)} a^2$$

$$\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2 \mathbb{V}(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)} a^2 = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

NB : tout ça est proprement insupportable si on ne pense pas systématiquement à faire apparaître les intégrales  $I_n(a)$  du début du problème, et à utiliser leur valeur.

## 8. On rappelle que :

- si A est une matrice sous forme de tableau NumPy, l'instruction : `A[i, :]` renvoie la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice A.
- si A est un tableau NumPy, l'instruction : `np.sum(A)` renvoie la somme des coefficients de A.
- si X est une matrice ligne, l'instruction :

```
plt.scatter(range(len(X)), X, marker='s')
plt.show()
```

représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de marqueurs carrés.

- si X est une matrice ligne, l'instruction :

```
plt.scatter(range(len(X)), X, marker='o')
plt.show()
```

représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de marqueurs ronds.

- (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise  $m$  simulations de la variable aléatoire  $V_n$  et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à  $m$  éléments :

Chaque ligne de la matrice X (de taille  $m \times n$ ) peut être vue comme un tirage de  $(X_1, \dots, X_n)$  : on en tire facilement un tirage de  $V_n$  qu'on range dans la liste V.

```
def simulV(a,m,n):
    X = simulX(a,m,n)
    V = np.zeros(m)
    for k in range(m) :
        V[k] = np.sum(X[k, :])*2/(3*n)
    return V
```

Pour la suite, on prend  $n = 100$  et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir  $m$  simulations de la variable aléatoire  $\lambda_n W_n$ .

- (b) Compléter les lignes ci-dessous, en justifiant votre réponse, pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

Analysons ce script : un des deux nuages de points représente des tirages de  $V_n$ , et l'autre de  $\lambda_n W_n$ . Ces deux variables sont d'espérance  $a$ , donc on peut comprendre que  $a = 5$  dans la simulation proposée.

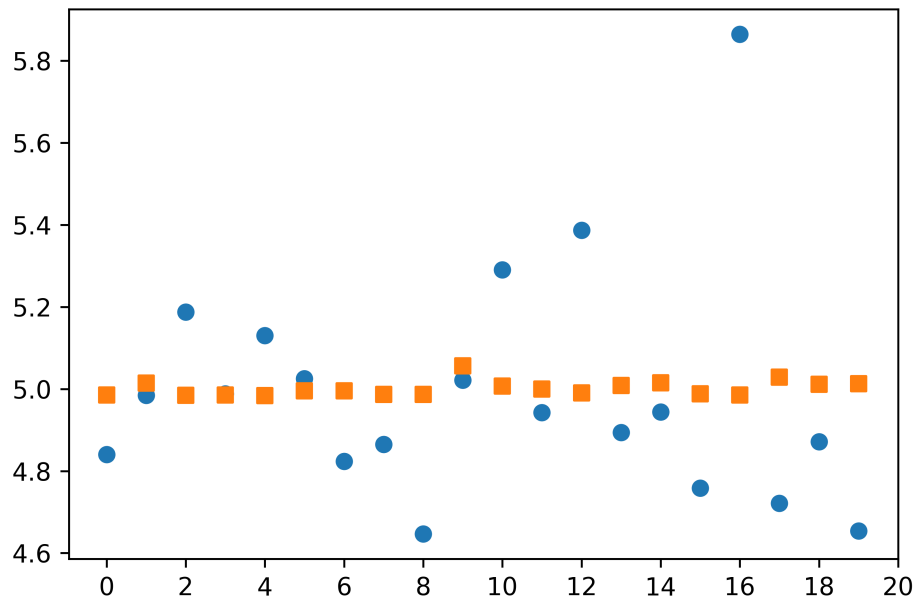
Comme il y a 20 points, on a  $m = 20$ .

Enfin on observe qu'un nuage de points est beaucoup plus resserré autour de sa valeur moyenne que l'autre. Ceci est relié à la variance des variables  $V_n$  et  $\lambda_n W_n$ .

Or les calculs précédents montrent que  $\mathbb{V}(V_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$  alors que  $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^2}$  : à  $n$  grand, la variance de  $\lambda_n W_n$  est beaucoup plus petite que celle de  $V_n$ .

On en déduit que les carrés donnent les valeurs de  $\lambda_n W_n$ , et les ronds les valeurs de  $V_n$ . D'où le code suivant :

```
V = simulV(5,20,100)
W = simulW(5,20,100)
plt.scatter(range(len(V)), V, marker='o')
plt.scatter(range(len(W)), W, marker='s')
plt.show()
```



## Exercice 2

### 1. Préliminaire

- (a) Soient  $M$  et  $N$  deux matrices semblables. Montrer que  $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$ .

$M$  et  $N$  sont semblables donc peuvent être vues comme deux matrices d'un même endomorphisme  $f$  dans deux bases différentes. On a alors  $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = \text{rg}(f)$ .

- (b) Soient  $M$  et  $N$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $M - \lambda I_n$  et  $N - \lambda I_n$  sont semblables.

Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que  $N = P^{-1}MP$ . On a alors :

$$N - \lambda I_n = P^{-1}MP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(M - \lambda I_n)P$$

ce qui montre que  $M - \lambda I_n$  et  $N - \lambda I_n$  sont semblables.

- (c) Dédurre des deux questions précédentes que deux matrices semblables ont le même spectre.

Soient  $M$  et  $N$  semblables.

On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(M) &\Leftrightarrow M - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(N - \lambda I_n) < n \quad (\text{car } M - \lambda I_n \text{ et } N - \lambda I_n \text{ sont semblables}) \\ &\Leftrightarrow N - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ \lambda \in \text{Sp}(M) &\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(N) \end{aligned}$$

ce qui donne bien  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$ .

*On pourra utiliser ce dernier résultat dans ce qui suit.*

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .

On pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

2. (a) **Calculer  $v$ .**

$f(e_1) = (0, -2, 1)$  par lecture de la 1ère colonne de  $A$  (on est dans la base canonique).  
Par suite,  $v = (1, -2, 1)$ .

- (b) **Montrer que la famille  $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .**

$u = (1, -1, 0)$ ,  $v = (1, -2, 1)$  et  $e_1 = (1, 0, 0)$ .

On vérifie par résolution d'un système que cette famille est libre ; elle est de cardinal 3 =  $\dim(\mathbb{R}^3)$  ; donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (c) **Déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ .**

$f(u) = (2, -2, 0) = 2u$  ;  $f(v) = (-1, 2, -1) = -v$  ; et comme  $v = f(e_1) + e_1$  on a  $f(e_1) = v - e_1$ .  
On tire de ces trois relations :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (a) **On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ .  
Expliciter la matrice  $P$ .**

Construction usuelle d'une matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) **Donner le lien entre les matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .**

La formule du changement de base donne  $A' = P^{-1}AP$ .

4. **Déduire de ce qui précède le spectre de  $A$ .  $A$  est-elle inversible ?**

D'après le préliminaire,  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A')$  car ces deux matrices sont semblables.  $A'$  étant triangulaire supérieure on a  $\text{Sp}(A') = \{-1, 2\}$  (coefficients diagonaux).

Ainsi

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$$

Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

5. (a) **Montrer :  $B^2 = 2B$ .**

Calcul direct.

- (b) **En déduire les valeurs propres de  $B$ , puis diagonaliser  $B$ .**

$X^2 - 2X = X(X - 2)$  est donc un polynôme annulateur de  $B$  ; on en déduit que  $\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$ .

Les 1ère et 3ème colonnes de  $B$  sont opposées, donc  $B$  n'est pas inversible ; et donc  $0 \in \text{Sp}(B)$ .

De plus,  $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  possède une ligne nulle donc n'est pas inversible ; donc  $2 \in \text{Sp}(B)$ .

Finalement on a  $\text{Sp}(B) = \{0, 2\}$ .



On trouve ensuite que  $E_0(B) = \text{Ker}(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  (cette colonne forme une base de  $E_0(B)$  car elle

est non nulle) ; et  $E_2(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  (base car 2 colonnes non colinéaires).

En posant  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  on a  $B = QDQ^{-1}$ .

**On pose :**  $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$ .

6. (a) **Montrer que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel.**

$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ; la matrice nulle est dans  $\mathcal{E}$  car  $B \times 0 = 0 \times A = 0$  ; et pour tous  $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$B(\lambda M_1 + M_2) = \lambda BM_1 + BM_2 = \lambda M_1 A + M_2 A = (\lambda M_1 + M_2) A$$

ce qui montre que  $\mathcal{E}$  est stable par combinaison linéaire.

$\mathcal{E}$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et donc un espace vectoriel.

(b) **Soit  $M$  une matrice appartenant à  $\mathcal{E}$ .**

**Montrer que  $M$  n'est pas inversible. (On pourra raisonner par l'absurde).**

Supposons que  $M \in \mathcal{E}$  soit inversible ; alors  $BM = MA$  s'écrit aussi  $A = M^{-1}BM$  et on en déduit que  $A$  et  $B$  sont semblables, ce qui est absurde car elles n'ont pas le même spectre.

7. **On cherche à montrer que  $\mathcal{E}$  n'est pas réduit à l'ensemble  $\{0\}$ .**

(a) **Justifier que, pour tout réel  $\lambda$ , les matrices  $A - \lambda I_3$  et  ${}^t(A) - \lambda I_3$  ont même rang, la matrice  $I_3$  désignant la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .**

${}^t(A) - \lambda I_3 = {}^t(A - \lambda I_3)$  a même rang que  $A - \lambda I_3$  car une matrice et sa transposée ont le même rang.

(b) **En déduire que les matrices  $B$  et  ${}^tA$  admettent une valeur propre en commun, notée  $\alpha$ .**

De la question précédente on déduit que  $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp}(A)$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) < 3 \quad (\text{les deux rangs sont égaux}) \\ &\Leftrightarrow {}^tA - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\ \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}({}^tA) \end{aligned}$$

On a donc  $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$  ; et  $\text{Sp}(B) = \{0, 2\}$  :  $\alpha = 2$  est une valeur propre commune à  ${}^tA$  et  $B$ .

(c) **Soient  $X$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\alpha$ , et  $Y$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre  $\alpha$ . On note :  $N = X {}^tY$ .**

**Montrer que la matrice  $N$  est non nulle et que  $N$  appartient à  $\mathcal{E}$ .**

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres donc non nuls ; il existe alors  $i_0$  tel que  $x_{i_0} \neq 0$  et  $j_0$  tel que  $y_{j_0} \neq 0$ .

Par produit d'une colonne avec une ligne,  $N = X {}^tY$  a pour coefficients  $n_{i,j} = x_i y_j$  ; on en déduit que

$n_{i_0, j_0} = x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$  et que  $N$  est non nulle.

Pour montrer que  $N \in \mathcal{E}$  on calcule, en utilisant que  $X$  est vep de  $B$  pour la vap  $\alpha$  :

$$BN = BX {}^tY = (BX) {}^tY = \alpha X {}^tY = \alpha N$$

et en utilisant que  $Y$  est vep de  ${}^tA$  pour la vap  $\alpha$  :

$$NA = X {}^tYA = X {}^t({}^tAY) = X {}^t(\alpha Y) = \alpha X {}^tY = \alpha N$$

On constate bien que  $BN = NA : N \in \mathcal{E}$ .

(d) **Soient  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  non nulle, et  $(X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2$  une famille libre.**

**Montrer que  $(X_1 {}^tY, X_2 {}^tY)$  est libre.**

Notons  $N_1 = X_1 {}^tY$  et  $N_2 = X_2 {}^tY$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2$  réels tels que  $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0$ .

On a :

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 X_1 {}^tY + \lambda_2 X_2 {}^tY = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) {}^tY = 0$$

$Y$  étant non nulle, si  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  était non nulle on montrerait comme en 7c que  $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) {}^tY \neq 0$ .

Par contraposition on déduit donc que

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis par liberté de  $(X_1, X_2)$  que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

$(X_1 {}^tY, X_2 {}^tY)$  est donc une famille libre.

(e) **En déduire :  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ .**

La question précédente donne une famille de matrices de  $\mathcal{E}$  : celles qui s'écrivent  $X {}^tY$  où  $X \in E_\alpha(B)$  et  $Y \in E_\alpha({}^tA)$ .

Montrons que ces matrices forment un espace de dimension 2. On sait pour cela que  $\dim(E_2(B)) = 2$ .

Soit  $(X_1, X_2)$  une base de  $E_2(B)$  et  $Y$  un vecteur propre de  $E_\alpha({}^tA)$  :  $(X_1, X_2)$  est libre et  $Y$  est non nulle donc d'après la question précédente,  $(X_1 {}^tY, X_2 {}^tY)$  est donc une famille libre.

En notant  $N_1$  et  $N_2$  ces deux dernières matrices :

$(N_1, N_2)$  est une famille libre d'éléments de  $\mathcal{E}$  (d'après 7c), ce qui montre que

$$\dim(\mathcal{E}) \geq \text{Card}(N_1, N_2) = 2$$

## Exercice 3 : Études de fonctions et de suites

*Corrigé fourni par l'EML*

Pour  $x \in ]0, +\infty[$  on pose :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

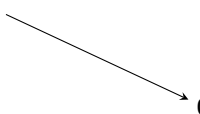
1. (a) **Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto f(x)$  (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).**

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Or,  $x+1 > 0$  (car  $x > 0$ ),  $e^{-x} > 0$  et  $x^2 > 0$ , donc  $f'(x) < 0$ . Par conséquent,  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

Calculons ses limites. On a directement (pas de forme indéterminée) :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  ( $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  et  $x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$ ) et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ( $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ). D'où le tableau de variations de  $f$  :

|         |                                                                                                                                                   |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$     | 0 <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>                                                                                         |
| $f'(x)$ | –                                                                                                                                                 |
| $f(x)$  | $+\infty$ <br><span style="float: right;"><math>0</math></span> |

- (b) **Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est correctement défini et strictement positif.**

On montre par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$  ».  
C'est évident pour  $n = 0$  (car  $u_0 = 1$  d'après l'énoncé).

Maintenant, soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque fixé. On suppose  $\mathcal{P}(n)$  et on montre  $\mathcal{P}(n+1)$  :

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ . En particulier,  $u_n$  appartient à l'ensemble de définition de  $f$ , donc  $f(u_n)$  est bien défini, i.e  $u_{n+1}$  est bien défini.

De plus, d'après les variations de fonction  $f$  étudiées à la question précédente, on a  $f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ . Donc en particulier  $f(u_n) > 0$ , i.e  $u_{n+1} > 0$ . D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion : par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .

## 2. Informatique.

- (a) **Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > a$ .**

On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir  $u_n > a$ , c'est-à-dire tant que  $u_n \leq a$ . D'où le programme :

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u <= a :
        u=exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

- (b) **On considère maintenant la fonction Python :**

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u > a:
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

**Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.**

**Qu'en déduire pour  $u_5$  et  $u_6$  ?**

**Commenter ce résultat en une ligne.**

La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit  $n$  tel que  $u_n \leq a$ .

Par conséquent, les termes  $u_0, \dots, u_4$  sont tous compris dans l'intervalle  $]10^{-6}; 10^6]$ . Par contre,  $u_5 \leq 10^{-6}$  et  $u_6 > 10^6$ . Il semblerait que la suite  $(u_n)$  alterne des très grand termes avec des très petits termes.

- (c) **Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier  $n$  et qui renvoie la valeur de  $u_n$ .**

Il suffit d'itérer  $n$  fois la fonction  $f$ , sur le modèle des fonctions `fonc_1` et `fonc_2`, mais avec une boucle `for` au lieu d'une boucle `while`. D'où le programme :

```
def suite(n):
    from numpy import exp
    u=1
    for k in range(n):
        u=exp(-u)/u
    return u
```

3. Pour  $x \in [0; +\infty[$  on pose :  $g(x) = e^{-x} - x^2$ .

- (a) **Démontrer que la fonction  $g : x \mapsto g(x)$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ .**

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables et pour tout  $x \geq 0$ , on a  $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$ . Or,  $e^{-x} > 0$  et  $2x \geq 0$ , donc  $g'(x) < 0$ . Par conséquent,  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $g$  est continue sur cet intervalle (puisque'elle y est dérivable). Donc, par le théorème de la bijection,  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $g([0; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0)]$ . Or, on a directement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $g(0) = 1$ .

Conclusion : la fonction  $g$  réalise une bijection (strictement décroissante) de  $[0; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ .

- (b) **En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une unique solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ , que l'on notera  $\alpha$ .**

Pour tout  $x > 0$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff e^{-x} = x^2 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or,  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ , et 0 appartient à l'intervalle image  $]-\infty; 1]$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $\alpha \neq 0$  car  $g(0) \neq 0$ .

Donc, d'après les équivalences ci-dessus, l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- (c) **Justifier que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . On rappelle que  $e \simeq 2,7$ .**

On a  $g(1) = e^{-1} - 1$ . Or,  $e > 2$ , donc  $e^{-1} < \frac{1}{2}$ , donc en particulier  $e^{-1} < 1$ . Par conséquent,  $g(1) < 0$ , c'est-à-dire  $g(1) < g(\alpha)$ . Par décroissance de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ , on en déduit que  $\alpha < 1$ .

De même,  $g(\frac{1}{e}) = \exp(\frac{-1}{e}) - \exp(-2)$ . Or, comme vu ci-dessus,  $\frac{1}{e} < 1$ , et donc en particulier,  $\frac{1}{e} < 2$ . D'où  $\frac{-1}{e} > -2$ , et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) :  $\exp(\frac{-1}{e}) > \exp(-2)$ . On en déduit que  $g(\frac{1}{e}) > 0$ , c'est-à-dire  $g(\frac{1}{e}) > g(\alpha)$ . Et donc, par décroissance de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ , on a finalement  $\alpha > \frac{1}{e}$ .

Conclusion : on a  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

4. (a) **Démontrer que l'on a :  $u_2 > u_0$ .**

On a  $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$ . Comme  $e > 2$ , on en déduit que  $u_1 < \frac{1}{2}$ . Par conséquent, par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on a  $f(u_1) > f(\frac{1}{2})$ , c'est-à-dire  $u_2 > 2e^{-1/2}$ .

Or,  $e < 4$ , donc  $e^{1/2} < 2$ , donc  $e^{-1/2} > \frac{1}{2}$  et donc  $2e^{-1/2} > 1$ .

Conclusion : on a  $u_2 > 1$ , c'est-à-dire  $u_2 > u_0$ .

(b) **En déduire que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n = u_{2n}$ , et montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_{n+1} > v_n$ . D'après la question précédente, on a  $u_2 > u_0$ , soit  $v_1 > v_0$ . Ainsi, la récurrence est initialisée. Maintenant, soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque fixé. On suppose que  $v_{n+1} > v_n$  et on montre que  $v_{n+2} > v_{n+1}$  : Par hypothèse de récurrence,  $v_{n+1} > v_n$ , soit  $u_{2n+2} > u_{2n}$ . Par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ , soit  $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ . De même, par stricte décroissance de  $f$ , on en déduit alors que  $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$ , soit  $u_{2n+4} < u_{2n+2}$ , ou encore :  $v_{n+2} > v_{n+1}$ , ce qui termine la récurrence.

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_{n+1} > v_n$ . Ainsi, la suite  $(v_n)$ , c'est-à-dire la suite  $(u_{2n})$ , est strictement croissante.

(c) **Justifier que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $w_n = u_{2n+1}$ . D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{2n+2} > u_{2n}$ . Par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ , soit  $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ , ou encore :  $w_{n+1} < w_n$ . Ainsi, la suite  $(w_n)$ , c'est-à-dire la suite  $(u_{2n+1})$ , est strictement décroissante.

Comme par ailleurs, elle est minorée par 0 ( $u_k > 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  d'après la question 1.(b)), on en déduit, par le théorème de la limite monotone que la suite  $(u_{2n+1})$  est convergente.

5. **Pour  $x \in ]0; +\infty[$  on pose :  $h(x) = f \circ f(x)$ . On pose également  $h(0) = 0$ .**

(a) **Soit  $x$  un réel strictement positif. Déterminer  $h(x)$ .**

Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , donc la composée  $h(x) = f(f(x))$  a bien un sens. De plus,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= \frac{x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}} \end{aligned}$$

Ce qui donne :  $h(x) = x e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)$ .

(b) **Démontrer que la fonction  $h : x \mapsto h(x)$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .**

D'après la question 1.(a), la fonction  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  à valeurs dans  $]0; +\infty[$ . Par conséquent,  $f \circ f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions continues. Autrement dit,  $h$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

Examinons maintenant la continuité de  $h$  (à droite) en 0. D'après la question précédente, on a, pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = x e^x \exp(-f(x))$ . Or,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ , donc  $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ , donc  $\exp(-f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . De plus,  $x e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , donc  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Autrement dit,  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} h(0)$ , ce qui établit la continuité de  $h$  (à droite) en 0.

Conclusion : la fonction  $h$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

(c) **Démontrer que l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , admet exactement deux solutions sur  $[0; +\infty[$  qui sont 0 et  $\alpha$ ,  $\alpha$  étant le réel introduit à la question 3b.**

On sait déjà que 0 est solution de  $h(x) = x$  puisque  $h(0) = 0$  par définition de  $h(0)$ . Cherchons maintenant les solutions strictement positives. Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
 h(x) = x &\Leftrightarrow x e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = x \quad (\text{question 5.(a)}) \\
 &\Leftrightarrow e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-e^{-x}}{x} = -x \quad \text{par injectivité de la fonction exp} \\
 &\Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \\
 &\Leftrightarrow f(x) = x \\
 &\Leftrightarrow x = \alpha \quad (\text{question 3.(b)})
 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est  $\alpha$ .

Conclusion : l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , admet exactement deux solutions sur  $[0; +\infty[$ , qui sont 0 et  $\alpha$ .

(d) **En déduire que**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ .

Reprenons les notations de la question 4.(c) : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_{2n+1}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$ . Notons  $\ell$  la limite de  $(w_n)$  (qui existe d'après la question 4.(c)), et passons à la limite dans l'égalité  $w_{n+1} = h(w_n)$ . On obtient alors, par continuité de  $h$  sur  $[0; +\infty[$  (cf question 5.(b)) :  $\ell = h(\ell)$ . Par conséquent, d'après la question précédente,  $\ell = 0$  ou  $\ell = \alpha$ .

Montrons que  $\ell \neq \alpha$ . Le premier terme de la suite  $(w_n)$  est  $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$ . Or, comme  $\alpha < 1$  (cf question 3.(c)), on a, par stricte décroissance de  $f$  :  $f(\alpha) > f(1)$ , soit  $\alpha > w_0$ . Ainsi, la suite  $(w_n)$  est strictement décroissante (cf question 4.(c)), et de premier terme strictement inférieur à  $\alpha$ . Elle ne peut pas converger vers  $\alpha$ . Par conséquent,  $\ell$  est nécessairement égal à 0.

Conclusion : la suite  $(u_{2n+1})$  converge vers 0.

6. **Montrer que**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$ .

On écrit simplement :

$$\forall n \geq 1, u_{2n} = f(u_{2n-1})$$

et avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n-1} = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  on a par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$$

*Remarque : les résultats des 2 questions précédentes confirment le commentaire effectué à la question 2.(b).*