

Concours Blanc n°2
Maths 1
9/03/2026
Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S'il existe $i \in \{1, 3\}$ tel qu'aucune question d'informatique de l'exercice i n'est traitée sérieusement, un malus de 1 pt sera appliqué à la note finale.

Exercice 1

1. Écrire les lignes d'import des packages Python numpy, numpy.random, et matplotlib.pyplot, sous leurs alias usuels.
On supposera ces imports effectués tout au long du sujet.

Soit a un réel strictement positif.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

- (b) Donner la fonction de répartition de X .
- (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
- (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{1/3}}$.

- (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
- (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.
- (c) Écrire une fonction en langage Python `simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rd.random((m,n))` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

5. (a) Calculer $\mathbb{P}([X > 2a])$.
 (b) Calculer $\mathbb{P}_{[X > 2a]}([X > 6a])$.
 (c) On suppose que la fonction Python de la question 4c a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(N):
    if ..... :
        s1 = s1 + 1
        if X[0,k] > 6*a :
            .....
if s1 > 0 :
    print( .... )

```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

6. On pose : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Montrer que $\mathbb{E}(V_n) = a$.
 (b) On note $\mathbb{V}(X)$ la variance d'une variable aléatoire X .

Montrer que $\mathbb{V}(V_n) = \frac{a^2}{3n}$.

7. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
 (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
 Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = a$.

(d) Montrer que $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

8. On rappelle que :

- si A est une matrice sous forme de tableau NumPy, l'instruction : `A[i, :]` renvoie la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .
- si A est un tableau NumPy, l'instruction : `np.sum(A)` renvoie la somme des coefficients de A .
- si X est une matrice ligne, l'instruction :

```

plt.scatter(range(len(X)), X, marker='s')
plt.show()

```

représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de marqueurs carrés.

- si X est une matrice ligne, l'instruction :

```

plt.scatter(range(len(X)), X, marker='o')
plt.show()

```

représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de marqueurs ronds.

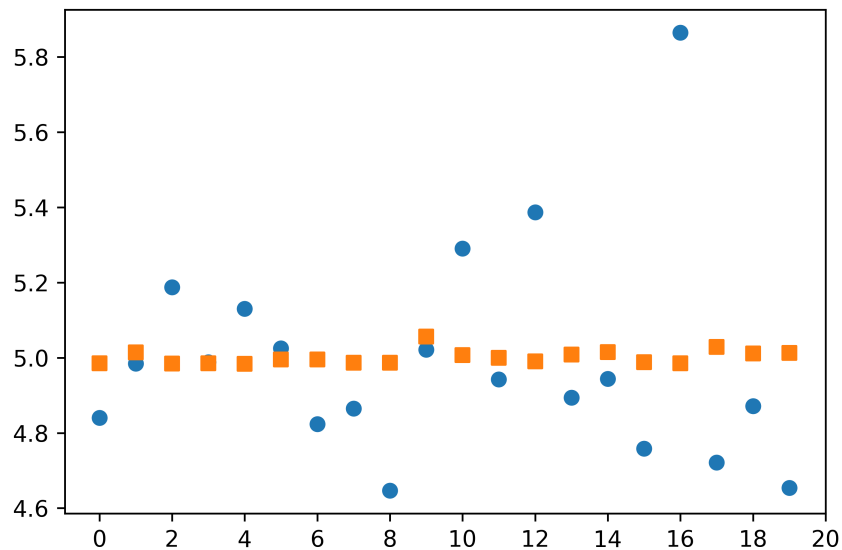
- (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
def simulV(a,m,n):  
    X = simulX(a,m,n)  
    V = np.zeros(m)  
    for k ..... :  
        V[k] = .....  
    return V
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

- (b) Compléter les lignes ci-dessous, en justifiant votre réponse, pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
V = simulV( ... , ... , ... )  
W = simulW( ... , ... , ... )  
plt.scatter( ... , marker='o')  
plt.scatter( ... , marker='s')  
plt.show()
```



Exercice 2

1. Préliminaire

- (a) Soient M et N deux matrices semblables. Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$.
- (b) Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ sont semblables.
- (c) Dédurre des deux questions précédentes que deux matrices semblables ont le même spectre.

On pourra utiliser ce dernier résultat dans ce qui suit.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

On pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \text{ et } v = f(e_1) + e_1.$$

- 2.
 - (a) Calculer v .
 - (b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
- 3.
 - (a) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P .
 - (b) Donner le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1} , en justifiant précisément.
- 4. Dédurre de ce qui précède le spectre de A . A est-elle inversible ?

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 5.
 - (a) Montrer : $B^2 = 2B$.
 - (b) En déduire les valeurs propres de B , puis diagonaliser B .

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

- 6.
 - (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
 - (b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. (*On pourra raisonner par l'absurde*).
- 7. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
 - (a) Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^t A) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) En déduire que les matrices B et ${}^t A$ admettent une valeur propre en commun, notée α .
 - (c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre α . On note : $N = X {}^t Y$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
 - (d) Soient $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle, et $(X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2$ une famille libre.
Montrer que $(X_1 {}^t Y, X_2 {}^t Y)$ est libre.
 - (e) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 3 : Études de fonctions et de suites

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. Informatique.
- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while ..... :  
        u = exp(-u)/u  
        n = .....  
    return n
```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while u > a:  
        u = exp(-u)/u  
        n = n+1  
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.
 - (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$.
 - (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α .
 - (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \simeq 2,7$.
4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
(b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 - (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3b.
 - (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$.
6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$.