

Fonctions à deux variables

Exercices

Exercice 1. Pour les fonctions suivantes :

- donner le domaine de définition ;
 - le représenter graphiquement si ce n'est pas $\mathbb{R}^2$ entier (on admettra que c'est, dans chaque cas, un ensemble ouvert) ;
 - donner l'expression du gradient en (x, y) ;
 - déterminer les éventuels extremums locaux.
1. $f(x, y) = xy(x + y - 1)$ (*examiner ensuite, à l'aide d'une limite, si le minimum local est global*)
 2. $g(x, y) = x \left((\ln(x))^2 + y^2 \right)$
 3. $k(x, y) = e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2$. (*à l'aide de DLs en 0 de $k(x, 0)$ et $k(0, y)$, déterminer la nature du point critique $(0, 0)$.*)

Exercice 2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

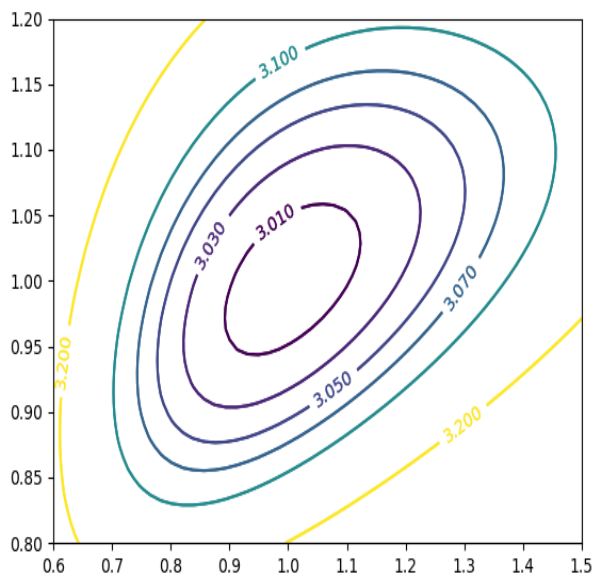
1. Déterminer les points critiques de f . Former la hessienne de f en chacun de ces points, et discuter leur nature (extremum ou selle).
2. Discuter l'existence d'un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra étudier une limite).

Exercice 3 (EML 2016).

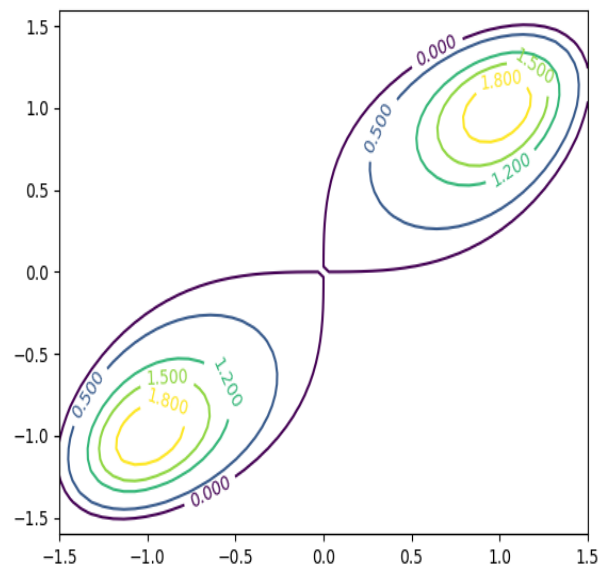
1. Soit $f(t) = t^2 - t \ln(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $t = 1$ est la seule solution de l'équation $f(t) = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $g(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition de g . On note cet ensemble $\mathcal{D}$, et on admet que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, et calculer le gradient de g en tout point de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que (x, y) est un point critique de g ssi : $x > 1$, $y = \frac{x}{\ln(x)}$ et $f(\ln(x)) = 1$.
Donner la valeur du seul point critique de g .
4. g admet-elle un extremum local en ce point ?
5. g admet-elle des extremums locaux sur $\mathcal{D}$? Et des extremums globaux ?

Exercice 4.

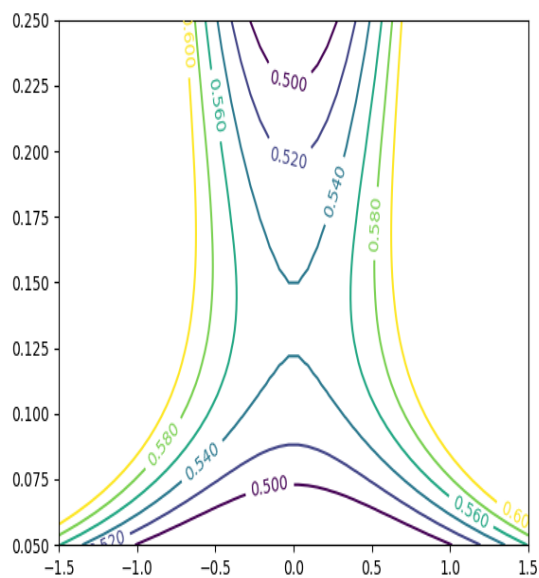
On donne les tracés de ligne de niveau de trois fonctions f_1, f_2, f_3 . Repérer d'éventuels extremums locaux ; donner des valeurs approchées des points (x, y) auxquels ils sont atteints, ainsi que de la valeur de la fonction en son extremum.



Lignes de niveau de f_1



Lignes de niveau de f_2

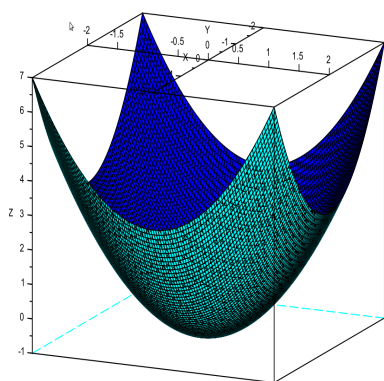


Lignes de niveau de f_3

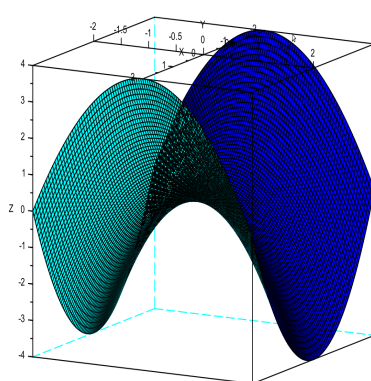
Exercice 5 (EDHEC 2017). On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

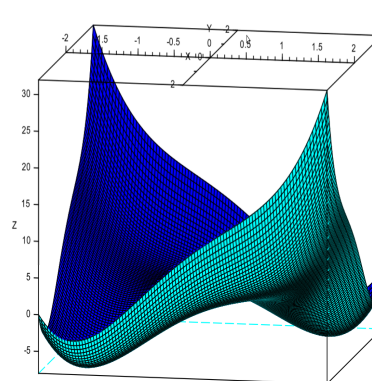
- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
 - Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :
$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$
 - En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
 - Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
 - Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
 - Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f .
- Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
 - Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
- L'une de ces 3 figures donne la nappe représentative de f . Laquelle ? Justifiez.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 6. Soit $f : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2} - ey^2$.

- Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Déterminer les points critiques de f et leur nature.

On va maintenant rechercher les minimums globaux de f .

- Donner les points où f peut admettre un minimum global.
- Montrer :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) - ex^2 \geq 0$$

(on pourra poser $t = x^2 + y^2$ et étudier une fonction de t).

En déduire : $\forall x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) > 0$.

- Montrer finalement que si $(x, y) \neq (0, 1)$ et $(x, y) \neq (0, -1)$, on a $f(x, y) > 0$ et conclure sur les minimums globaux de f .

Exercice 7 (ECRICOME 2020). Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de f_n .
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.
5. Montrer : $\forall t \geq 2, t^{2n} - 1 \geq 1$. En déduire que : $\forall x \geq 2, f_n(x) \geq f_n(2) + \ln(x + 1) - \ln(3)$, puis la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

On étudie maintenant la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

7. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
8. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .
9. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
10. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
11. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 8 (EML 2020).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
3. Calculer u_1 et u_2 .

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ définie par :

$$F : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

4. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$.
(b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie dans la question 1.
5. (a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point (u_3, u_3^2) .
(b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6u_3^2 - 2$$

6. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0, +\infty[^2$?

Exercice 9 (Méthode des moindres carrés).

On démontre dans cet exercice la formule de régression linéaire basée sur la méthode des moindres carrés.

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux séries statistiques. On cherche à effectuer une régression linéaire, c'est-à-dire à trouver les « meilleurs » a et b tels que $y_i \simeq ax_i + b$.

On décide du critère suivant : on retient le couple (a, b) tel que la quantité

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

est minimale. Nous allons prouver l'existence et l'unicité de ce couple, et donner sa valeur.

On introduit les indicateurs statistiques usuels :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 ; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i ; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 ; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et on suppose $s_x^2 \neq 0$.

1. Montrer que $\varphi(a, b) = \overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\bar{y} + a^2\overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2$.
2. Rappeler les expressions des variances empiriques s_x^2, s_y^2 et de la covariance empirique s_{xy} .
3. Montrer que l'unique point critique de φ est (a_0, b_0) où $a_0 = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b_0 = \bar{y} - a_0\bar{x}$.
4. Calculer $\nabla^2(\varphi)(a_0, b_0)$ (à exprimer en fonction de $\bar{x}$ et $\overline{x^2}$).
5. Montrer que les valeurs propres de cette hessienne (notées λ_1, λ_2 , avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$) vérifient

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2(1 + \overline{x^2}) \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4s_x^2 \end{cases}$$

En déduire que φ admet un minimum local en (a_0, b_0) .

On peut en fait montrer que ce minimum est global.