ECRICOME 2026
Corrigé

Exercice 1

1) La première compagnie étant choisie de manière équiprobable :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$$

et donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$; $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ (qui existent bien !)

2) Par probas conditionnelles :

$$P((X=j) \cap (Y=k)) = P(X=j)\, P_{(X=j)}(Y=k)$$

(On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$: vu que la personne peut conserver son assurance, $Y=n$ est possible.)

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(X=j) = \frac{1}{n} \quad (q.1)$$

et si $(X=j)$, Y peut prendre les valeurs $1, 2, \dots, j$ de manière équiprobable, ce qui donne

$$P_{(X=j)}(Y=k) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{si } k \in [\![1, j]\!] \\ 0 & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Au final : $\boxed{\forall (j,k) \in [\![1, n]\!]^2,\ P(X=j \cap Y=k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \times \frac{1}{j} & \text{si } k \in [\![1, j]\!] \\ 0 & \text{si } k > j \end{cases}}$

3) "La somme des probas vaut 1 !" ②

Plus précisément :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{P(X=j \cap Y=k)}^{=0 \text{ si } j<k \ ; \ = \frac{1}{j} \text{ si } j \geq k} = 1$$

donc $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=k}^{n}}_{\substack{\text{on ne conserve} \\ \text{que les termes} \\ j \geq k}} \frac{1}{nj} = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = n}$

4) Par probas totales sur le SCE $((X=j))_{1 \leq j \leq n}$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(Y=k) = \sum_{j=1}^{n} P((X=j) \cap (Y=k))$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{nj}$$

$$\boxed{P(Y=k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}}$$

5a. Il s'agit d'une interversion de $\sum$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{k}{j}$$ et là ça va tout de suite mieux !

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \times \frac{\cancel{j}(j+1)}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k}{j} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)}$$

$$=$$

5b. $Y(\Omega)$ est fini donc $\underline{E(Y) \text{ existe}}$

On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j}$$

$$\cancel{= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} 1}$$

5a

$\Rightarrow E(Y) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)$ d'après 5a

$$= \frac{1}{2n}\left(\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\Sigma j} + \underbrace{n}_{\Sigma 1}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n^2+n+2n}{2}\right) = \boxed{\frac{n+3}{4}}$$

6a. $XY(\Omega)$ est fini donc $E(XY)$ existe.

proba nulle pour $k>j$

$$E(XY) = \sum_{\substack{j\in X(\Omega)\\ k\in Y(\Omega)}} jk\,P(X=j \cap Y=k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} jk\,\frac{1}{nj}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} j(j+1)}$$

6b. On découpe et on somme avec les formules usuelles :

$$E(XY) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$= \frac{1}{2\cancel{n}}\left[\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1+3}{6}\right]$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}}$$ si je ne m'abuse

et pensez à <u>ne pas</u> <u>développer</u>

6c $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)}{2}\,\frac{n+3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\left[\frac{n+2}{3} - \frac{n+3}{4}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+8-3n-9}{12}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-1)}{24}}$$ si je ne m'abuse

7a. Pour $n \geq 2$ (énoncé) on voit que $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes

8a. Ne pas oublier les imports ! (cf énoncé)

On choisit X équiréparti dans $[\![1,n]\!]$
puis Y ———— $[\![1,X]\!]$

```
import numpy as np.
import numpy.random as rd

def simulXY(n):
    X = rd.randint(1, n+1)
    Y = rd.randint(1, X+1)
    return X, Y
```

8b. Allez voir l'annexe !

$$M = \begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y^2 \end{pmatrix}$$ variances / covariance empiriques des séries x et y.

du coup $M[0,1] = S_{xy}$
$M[0,0] = S_x^2 = v_x$
$M[1,1] = S_y^2 = v_y$

puis $R = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \times S_y^2}} = \dfrac{S_{xy}}{S_x \times S_y}$ est <u>le coefficient de corrélation empirique des séries x et y</u>

8c
- On peut commencer par écarter la droite qui n'est pas droite...
- La dte de régress° linéaire passe par le pt moyen
- $Cov(X,Y) > 0$ donc cette droite est $\nearrow$. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Tracé 2}}$

9a $\boxed{A_n = (X = Y)}$ (que dire de plus ??)

9b. Par FPT sur $(X=j)_{1\leq j\leq n}$ [au pire, à mon avis ça passe comme ça]

$$P(X=Y) = \sum_{j=1}^{n} P\big((X=j)\cap(Y=j)\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{nj} \qquad (9.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}}$$

9c Ah, là on bifurque assez méchamment en analyse.

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\searrow$ sur $[j, j+1]$ $(j \in \mathbb{N}^*)$

donc $\forall t \in [j, j+1]$, $\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}$

et en intégrant $\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1}\,dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_j^{j+1}\frac{1}{j}\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}}$$

9d. On commence par sommer $\ln(j+1)-\ln(j) \leq \frac{1}{j}$ pour $1 \leq j \leq n$. Un télescopage à gauche donne alors

$$\ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \qquad \Big) \times \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\ln(n+1)}{n} \leq P(A_n)}$$

Ensuite on décale l'indice pour avoir une majorat° de $\frac{1}{j}$ pour $\underline{\underline{j \geq 2}}$:

$$\forall j \geq 2, \quad \frac{1}{j} \leq \ln(j) - \ln(j-1)$$

(en "faisant $j = j-1$" ds la 1ère inégalité de 9c)

$\sum_{j=2}^{n}$

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq \ln(n) - \ln(2-1)$$

$+\frac{1}{1}$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \ln(n) + 1$$

$\times \frac{1}{n}$

$$\boxed{P(A_n) \leq \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}}$$

et donc par th— des gendarmes on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$$

9e. Divisons, pour $n \geq 2$, l'encad^{r} de 9d par $\frac{\ln(n)}{n} > 0$:

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{P(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\ln(n)} + 1}_{\to 1}$$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = \underline{\underline{1}}$

10. Schématisons cela.

assure
assure
id_2025
id_2026

← clairement une <u>clé primaire</u>

← "identifient une compagnie d'assurance" donc des <u>clés étrangères</u> qui pointent vers la table des assureurs...

← que voici ! : ~~les 2 tables~~

compagnie
id
nom

clé primaire

<u>id_2025</u> et <u>id_2026</u> pointent donc vers <u>id</u>

<u>10a</u>. On cherche le nombre d'assurés ayant la m compagnie en 2025 et 2026

nombre ↑ COUNT

assurés ↑ Table "assure"

$\underbrace{\text{2025 et 2026}}_{\text{id\_2025 = id\_2026.}}$

```
SELECT COUNT(*)
FROM assure
WHERE id_2025 = id_2026
```

10b. La jointure relie la clé id_<u>2026</u> à "l'annuaire des assureurs" (table compagnie)

donc renvoie une table à 2 colonnes :

la 1° colonne est l'identifiant d'un assuré

—— 2° —— est le nom de sa compagnie d'assurance en <u>2026</u>.

↳ et surtout super-HP pour GROUP BY...

10c Pas facile ! En allant voir dans l'annexe, il s'agit de faire un GROUP BY, mais en agrégeant par la moyenne (AVG) plutôt que par le nombre (COUNT(*))

Ils nous demandent aussi de renommer la colonne : avec "AS"

```
SELECT compagnie, AVG(note) AS ~~moyenne~~ note
FROM avis
GROUP BY compagnie
```

10d. Ici c'est plus classique :

```
SELECT *
FROM moyenne
ORDER BY note DESC
```

Exercice 2

Partie I

(Heu… pourquoi ne pas mettre $f(x) = -\ln(1-x)$??)

1. $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ existe ssi $\frac{1}{1-x} > 0$, ce qui équivaut à $x < 1$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[} = I$$

2. Pour $x \to -\infty$, $\frac{1}{1-x} \to 0^+$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Pour $x \to 1^-$, $\frac{1}{1-x} \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

3. $\forall x < 1$, $f(x) = -\ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} > 0$

pour $x < 1$

d'où :

x	$-\infty$		1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

4a. $f(x) = -\ln(1 \underbrace{-x}_{\to 0}) \underset{x \to 0}{=} -\left((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o(x^2)\right)$

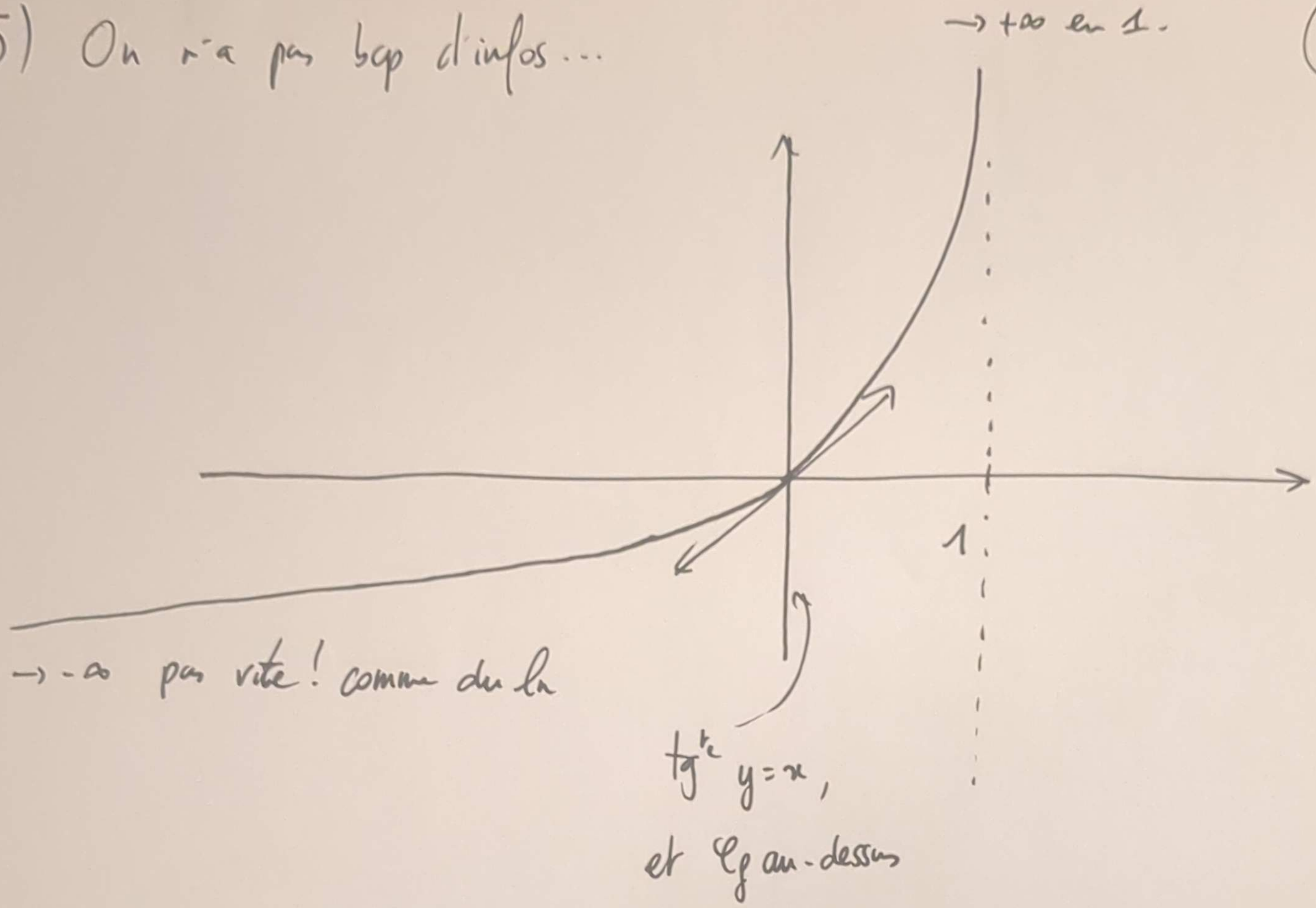
$$\boxed{f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

termes "a+bx"

4b. Par lecture du DL : * $y = x$ est l'équat° de la tangente en 0

* $f(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \geq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente au vois. de 0

5) On n'a pas bcp d'infos...



Partie II

6a $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge (Riemann, $\alpha = 1$)

6b. $S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; d'où $S_{n+1}(1) - S_n(1) = \frac{1}{n+1} > 0$

$\Rightarrow \left(S_n(1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

6c. On on sait que $(S_n(1))$ ne tend pas vers une limite finie (ce sont les sommes partielles de $\sum \frac{1}{k}$ dv).

Comme c'est une suite croissante : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n(1) = +\infty}$

7. $\forall x \in]-1,1[, \forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$\left|\frac{x^k}{k}\right| \leq |x|^k$$

Or $\sum_k |x|^k$ est une série géométrique de raison $|x| \in [0,1[$ donc convergente.

Par comparaison de SATP, $\sum \left|\frac{x^k}{k}\right|$ cv

d'où $\boxed{\sum \frac{x^k}{k} \text{ cv absolument}}$

8a. $S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}$

$$= \frac{2n+1-(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$

d'où : $\boxed{(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$

et $S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$$

d'où $\boxed{(S_{2n+1}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ croît}}$

Enfin :

$$S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

On en conclut que $\boxed{(S_{2n}(-1)) \text{ et } (S_{2n+1}(-1)) \text{ sont adjacentes}}$

8b. Par théorème, $(S_{2n}(-1))$ et $(S_{2n+1}(-1))$ convergent donc vers une même limite l

d'où $\boxed{(S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ tend aussi vers } l}$

8c $(S_{2n}(-1))$ est décroissante, donc prend des valeurs supérieures à sa limite : on en déduit $S_{2n}(-1) \geq -\ln(2)$

et donc $\ln(2) + S_{2n}(-1) \geq 0$

$$\Rightarrow \underline{|\ln(2) + S_{2n}(-1)| = \ln(2) + S_{2n}(-1)}$$

On a donc à montrer :

$$\ln(2) + \cancel{S_{2n}(-1)} \leq \cancel{S_{2n}(-1)} - S_{2n+1}(-1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2)}$$

ce qui est <u>acquis</u> car $(S_{2n+1}(-1))$ tend vers $-\ln(2)$ <u>en croissant</u>.

8d. Examinons donc :

$$S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit $\boxed{|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}}$ par transitivité.

9a. Si $x > 1$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{x^k}{k} = +\infty$ par croissances comparées, donc

$\sum \frac{x^k}{k}$ diverge grossièrement

9b. $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs, divergente ; donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = +\infty}$

Partie III

Soit $a \in]-1, 1[$.

10 a. $\int_0^a \frac{1}{1-t}\,dt = \left[-\ln|1-t|\right]_0^a = -\ln|\underbrace{1-a}_{>0}| = f(a)$

$\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$

10 b.

On peut plutôt partir de $R_1(a)$ pour utiliser l'indicat°

$$R_1(a) = \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2}\,dt = \int_0^a \frac{(a-1)+(1-t)}{(1-t)^2}\,dt$$

$$= (a-1)\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2}\,dt + \int_0^a \frac{1}{1-t}\,dt$$

$$= (a-1)\times\frac{a}{1-a} + f(a)$$

10a

$$R_1(a) = f(a) - a \quad \text{d'où} \quad \boxed{f(a) = a + R_1(a)}$$

~~11. Par récurrence, donc.~~

~~Pour $n=1$ on cherche à montrer : $R_1(a) = \frac{a^2}{2}$~~

11. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$

On intègre $t \mapsto (a-t)^n$ en $t \mapsto -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$

On dérive $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ en $t \mapsto (-1)\times(-(n+1))\times(1-t)^{-n-2}$

$\left(= (1-t)^{-(n+1)}\right)$ $\qquad t \mapsto \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}$

IPP φ^1

$$\Rightarrow R_n(a) = \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{(1-t)^{n+1}}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{(a-t)^{n+1}}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n+1}}{(1-t)^{n+2}}\,dt$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}\,dt = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

(NB : pour le choix de l'IPP, on peut remarquer que "a^{n+1}" ne peut apparaître qu'en intégrant $t \mapsto (a-t)^n$ ... le reste s'ensuit en croisant les doigts)

12 Soit $\mathcal{P}(n)$: " $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ "

- $\mathcal{P}(1)$ s'écrit : $f(a) = S_1(a) + R_1(a)$

  or $S_1(a) = \sum_{k=1}^{1} \frac{a^k}{k} = a$; donc $\mathcal{P}(1)$ est montrée en 10b

- Supposons que $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k} + R_n(a)$$

Avec 11., on a $f(a) = \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k} + \frac{a^{n+1}}{n+1}} + R_{n+1}(a)$

$$\Leftrightarrow f(a) = S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a)$$

d'où l'hérédité.

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(a) = S_n(a) + R_n(a)}$

13a. $t \in [0,a] \subset [0,1[$ donc $1-t > 0$, $a-t \geq 0 \Rightarrow \frac{a-t}{1-t} \geq 0$.

De plus $\frac{a-t}{1-t} - a = \frac{a-t-a+at}{1-t} = \frac{at-t}{1-t} = \underbrace{t}_{\geq 0} \frac{(a-1)}{(1-t)} \underset{>0}{\overset{\leq 0}{}} \leq 0$

d'où $\frac{a-t}{1-t} \leq a$.

Finalement : $\boxed{0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a} \quad \forall t \in [0,a]$

13b. On observe

$$R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt = \int_0^a \underbrace{\frac{1}{1-t}\left(\frac{a-t}{1-t}\right)^n}_{\geq 0 \text{ pour } t\in[0,a] \text{ (montré en 13a)}} dt$$

d'où $\underline{R_n(a) \geq 0}$ ($a \geq 0$, bornes de l'ordre $\nearrow$)

De plus : $\forall t \in [0,a],\quad 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{a-t}{1-t}\right)^n \leq a^n$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{1-t}\left(\frac{a-t}{1-t}\right)^n \leq \frac{a^n}{\underbrace{1-t}_{\geq 1-a}} \leq \frac{a^n}{1-a}.$$

En intégrant sur $[0,a]$ $(0 \leq a)$:

$$\boxed{0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a}\,dt = \frac{a^n}{1-a} \times \int_0^a 1.\,dt = \frac{a^{n+1}}{1-a}}$$

13c. $a \in [0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(a) = 0$

par gendarmes

Avec 12 : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a) = f(a)$

donc on a bien $\boxed{S(a) = f(a)}$

14a. On va manifestement prendre $a = \frac{1}{2} \in [0, 1[$.

Alors : $f(a) = \ln\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \underline{\underline{\ln(2)}}$

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1/2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k}$$

et
$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} \right| = \left| f(a) - S_n(a) \right| = \left| R_n(a) \right|$$
$$= R_n(a) \quad (R_n \geq 0)$$
$$\leq \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$$

On a bien l'inégalité recherchée

14b. $\ln(2)$ est approché par les sommes $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k}$ (qui tendent vers $\ln(2)$)

On contrôle l'écart par la majorat° qui précède : si $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$, on est assuré que $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} \right| \leq \varepsilon$.

d'où :
```
def Val(eps):
    n = 1
    S = 1/2        # S1
    while 1/(2**n) > eps:
        n = n+1
        S = S + 1/(n*2**n)    # on passe au terme suivant de (Sn)
    return S
```

1.4.c Tout le monde tend bien vers $\ln(2) \simeq 0{,}7$.

$\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (somme partielle de SATP)

alors que $\left(-S_n(-1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone (une ss-suite $\nearrow$, et une autre $\searrow$)

les $\bullet$ sont donc les termes de $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

et les $+$ ———————— $\left(-S_n(-1)\right)$

~~Exercice 3~~

Exercice 3

Partie 1

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad s'(t) = x'(t) + y'(t)$
$$= x(t) + y(t) - x(t) - y(t)$$
(en utilisant le système, x et y sont solutions)

$$\Rightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad s'(t) = 0}$$

2. s est de dérivée nulle donc constante

Comme $s(0) = x(0) + y(0) = 2$ on en déduit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) + y(t) = 2}$$

3. On peut alors obtenir une ED sur x :

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = x(t) + y(t) = 2$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

Or $x(0) = 1$; ce qui donne $\underline{K = 1}$

et finalt : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} x(t) &= 2t + 1 \\ y(t) &= 2 - x(t) = 1 - 2t \end{aligned}}$

Partie III

4. On a une formule pour des matrices 2x2.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, "$ad-bc$" $= 1 \neq 0$ donc P est inversible

et $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$

5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $A - \lambda I_2$ non inv $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ non inv.

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - (-1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0.$

$\Rightarrow \boxed{Sp(A) = \{0\}}$

6. Si A était diagonalisable, on aurait l'existence de $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $A = QDQ^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $Sp(A) = \{0\}$

Ceci impliquerait $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui n'est pas le cas ici.

Ainsi, $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

7. On pourrait se mettre à parler chg^t de base mais ici on a tout sous la main, ça va plus vite de calculer !

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}}.$$

8. (S) s'écrit, avec les objets introduits, $X' = AX$.
D'après le cours, l'ensemble des états d'équilibre est $\underline{\mathrm{Ker}(A)}$.

Résolvons : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \iff y = -x.$

d'où $\boxed{\underline{\underline{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}} \text{ est l'ensemble des états d'équilibre de (S)}}$

9. x et y (composantes de X) sont solut° de (S) ssi :

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$$

$$\iff \text{—},\ PY'(t) = PJP^{-1}(PY(t))$$

$$\iff \text{—}\quad PY'(t) = PJY(t)$$

$$\iff \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = JY(t)}$$

$\times P^{-1}$ $\underline{\text{inversible}}$

10. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Y' = JY \iff \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & u'(t) = v(t) \\ & v'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \ u'(t) = k \\ \exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, v(t) = k \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\exists (k, k') \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{array}{l} u(t) = kt + k' \\ v(t) = k \end{array}}$$

11. D'après 9 et 10 :

X solut° de (S) ssi $P^{-1}X$ solut° de $Y' = JY$

ssi $P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} kt + k' \\ k \end{pmatrix}$ (k, k' réels)

ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t) = P \begin{pmatrix} kt + k' \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kt + k' \\ -kt - k' + k \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Les solut° de } (S) \text{ sont donc les fonct° } t \mapsto \begin{pmatrix} kt + k' \\ -kt + k - k' \end{pmatrix} \text{ où } k, k' \text{ réels}}$$

Partie III

11. Un point clé est ici le critère de nilpotence : $\exists\, p \leq n$ tq $M^p = 0_n$

Pour tester la nilpotence, il suffit donc de tester si l'une des matrices $M, M^2, \dots, M^n$ est nulle

On pourrait alors calculer M^n direct^t, mais cela ne répond pas à la quest° qui demande l'indice de nilpotence (i.e. la puissance minimale tq $M^p = 0$)

Il faut donc tester successivement les matrices $M, M^2, \dots$ jusqu'à M^n.

```
def Nil(M) :
    n = np.shape(M)[0]   # nb de lignes de M
    B = M
    p = 1
    while (B == np.zeros((n,n))).all == False and p < n :
        B = np.dot(B, M)
        p = p+1
    if B == np.zeros((n,n)).all() :   # on a obtenu une puissance nulle
        return p
    else :
        return 0                      # M non nilp.
```

⚠ attent° au " .all() " pour comparer des np.array (cf annexe)

13. N est nilpotente, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $N^p = 0$.

Alors X^p est annulateur de N ; d'où $Sp(N)$ est inclus ds les racines de X^p.

la seule racine de X^p est 0 : $\boxed{Sp(N) \subset \{0\}}$

* si $0 \notin Sp(N)$, N est inversible, et donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, N^p est inversible : ce serait absurde car $N^p = 0$

D'où $\underline{0 \in Sp(N)}$, et finalt $\boxed{Sp(N) = \{0\}}$

14. Comme en 6)

15. $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = B(t) X_0$

$\Rightarrow$ — $X'(t) = B'(t) X_0$ est on dérive une somme :

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{\frac{k t^{k-1}}{k!}}_{\text{nul pour } k=0} N^k X_0$$

$$\boxed{X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0}$$

16. Par ailleurs, $NX(t) = NB(t) X_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} \overbrace{N^{k+1}}^{\text{pour } k=p-1 \text{, on obtient } N^p=0} X_0$

$$= \sum_{k=0}^{p-2} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0$$

$$NX(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \text{ par décalage d'indice}$$

On constate bien : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = NX(t)$.

De plus, si $X(t) = B(t)\,X_0$

alors $X(0) = B(0)\,X_0$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k X_0$$

seul le terme $k=0$ de la somme est non nul

$$= I_n \times X_0$$

$$= X_0$$

$X : t \mapsto B(t)\,X_0$ est donc solut° de $(\mathcal{E})$, et vérifie la condit° initiale.

d'après le théorème de Cauchy, c'est l'unique solut° du pb de Cauchy
$$\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

17. Ici on calcule les $\dfrac{t^k N^k}{k!}$ comme $tN \times \dfrac{tN}{2} \times \dfrac{tN}{3} \times \dots \times \dfrac{tN}{k}$ obtenu par accumulation.

```
def B(N, t):
    if Nil(N) == 0:          # cf définit° de "Nil"
        return ( - —— )
    else:
        T = np.eye(len(N)) . # In: initialise (tN)^k/k!
        S = T                # initialise la somme
        for k in range(1, Nil(N)): # on itère jusqu'à k=p-1 où p=Nil(N)
            T = t/k * np.dot(T, N)   # (on multiplie par tN/k)
            S = S+T
        return S
```

Bilan :

Beau sujet ... mais long, ce qui est en fait un avantage car cela vous donne plus d'occasions de montrer ce que vous savez faire.

L'exercice 3 est le + facile : de q 1 à q 14 ce sont des calculs très proches du cours, à savoir refaire si cela vous a posé problème. Python pas très facile ds cet exo. La fin est moins usuelle ... mais vous n'êtes pas obligé·e d'y passer bcp de temps car il y a plein d'autres choses à faire.
[mais revoyez-le si vous avez un peu de tps : c'est instructif].

Exo 2 RAS sur la partie I, une quest° 8 assez technique ("séries alternées", exo de TD classique mais pas évident, et la 8c est un résultat de majorat° du reste qu'il semble stratégique d'admettre)

Partie III assez rébarbative mais seule l'IPP de q 11 est difficile, le reste est long mais ça se fait. Python très abordable.

Exo 1 : Ça attaque fort ! Schéma classique "d'expérience en 2 étapes" mais les calculs sont très désagréables. L'énoncé vous donne les intermédiaires pénibles (5a, 6a) : n'hésitez pas à les admettre et à aller faire la suite !
Python de 8a sans difficulté, et en 8b il faut aller lire l'annexe !

(j'espère donc que vous avez lu le préambule et n'avez pas découvert l'existence de l'annexe après 3h d'épreuve...)

Si vous avez obtenu une covariance ≥ 0, 8c ne devait pas poser de problème ... j'ose quand même espérer que personne n'a répondu que le tracé 1 représentait la droite de regression linéaire !!

Une fin d'exo très sanglante à partir de 9c où on change de domaine et où l'énoncé manque d'indicat° : là aussi dites-vous assez vite, si vous avez un peu de mal, qu'il est stratégique de passer.

SQL assez déstabilisant mais pas si dur si vous prenez le temps de comprendre la structure de la base de données en reconnaissant clés primaires et étrangères (même si l'énoncé ne le demande pas...)

Et pour GROUP BY... vous ne connaissiez pas, normal car c'est HP, donc en cas de manque d'idées baladez-vous dans les annexes pour y chercher l'inspiration. Cela demande un peu d'improvisation, mais je ne trouve pas cela scandaleux. Rassurez-vous, tout le monde n'aura pas réussi cette question !

Bon courage pour la suite !