

## Concours Blanc n°1 - Maths 1

28/11/2022

Durée : 4h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

### Exercice 1

On considère l'application  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t$  de  $]0, +\infty[$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 ; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet :  $0,69 < \ln(2) < 0,70$ .

#### PARTIE I : Étude de la fonction $f$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
2. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer, pour tout  $t$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ .
3. Dresser le tableau des variations de  $f$ . On précisera la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet une tangente en O et préciser celle-ci.
  - (b) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
  - (c) Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$ .
5. Montrer que l'équation  $f(t) = 1$ , d'inconnue  $t \in [0, +\infty[$ , admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

#### PARTIE II : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

6. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
7. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
8. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction  $t \mapsto t - \ln(t)$ .)
9. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel N tel que  $1 - u_N < 10^{-4}$ .

## Exercice 2

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , dans laquelle on effectue une succession de  $(n+1)$  tirages indépendants d'une boule avec remise. On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, le numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro du tirage précédent.

Ainsi, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , la variable aléatoire  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$ . Par exemple, si  $n = 5$ , et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 1, 3, alors  $X_5 = 4$ .

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on note  $N_k$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu au  $k$ -ième tirage.

### Partie I : Simulation informatique

1. On cherche à écrire une fonction Python qui prend pour argument l'entier  $n \geq 2$ , effectue cette expérience, et renvoie une simulation de  $X_n$ .

Compléter le code suivant :

```
import numpy.random as rd

def experience(n):
    tirages = rd.randint(1, n+1, (n+1,)) # liste des (n+1) tirages
    k = ...
    while ... :
        k = k+1
    return ...
```

### Partie II : Étude du cas $n = 3$

On suppose, **dans cette partie uniquement**, que  $n = 3$ . L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

2. (a) Exprimer l'événement  $(X_3 = 4)$  à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires  $N_1, N_2, N_3$ .  
En déduire  $P(X_3 = 4)$ .  
(b) Montrer que  $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$ , et en déduire  $P(X_3 = 3)$ .
3. Calculer l'espérance de  $X_3$ .

### Partie III : Cas général

Dans toute cette partie,  $n$  est un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

4. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , déterminer la loi de  $N_k$ , et rappeler (sans démonstrations) son espérance et sa variance.
5. Calculer  $P(X_n = n+1)$ .
6. Montrer, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$ .
7. En déduire une expression simple de  $P(X_n = 2)$ .
8. Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Justifier l'égalité d'événements suivante :  $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$ .  
En déduire :  $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$ .  
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour  $k = 0$  et  $k = 1$ .
9. Exprimer, pour tout  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ ,  $P(X_n = k)$  à l'aide de  $P(X_n > k-1)$  et de  $P(X_n > k)$ .
10. En déduire :  $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$ .
11. Calculer  $E(X_n)$ .
12. En appelant la fonction `experience` codée dans la question 1, proposer un script Python qui renvoie une valeur approchée de  $E(X_{10})$ .

### Exercice 3

Un amateur d'art décide de créer une base de données selon le schéma suivant :

- Une table **Artistes** répertoriant des artistes , qui contient 4 colonnes : un identifiant (), Nom - Pays - Siècle)

id_Artiste	Nom_Artiste	Pays	Siècle
1	Picasso	Espagne	20
2	Léonard de Vinci	Italie	15
3	Monet	France	14
⋮	⋮	⋮	⋮

- Une table **Musées** répertoriant des musées sous la forme

id_Musée	Nom_Musée	Pays	Ville	Prix	Ouverture	Fermeture
1	Louvre	France	Paris	15.5	10	20
2	Met	USA	New York	10	8	17
3	Uffizi	Italie	Florence	20	9	19
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(dans cette table, l'entrée au Louvre coûte 15.5€ , et le Louvre est ouvert de 10h à 20h. On considérera que les horaires des musées peuvent s'exprimer avec des nombres entiers)

- Une table **Oeuvres** répertoriant des œuvres sous la forme :

Titre	Auteur	Genre	Musée	Estimation
L'Adoration des Mages	2	Peinture	3	1000000
La Cathédrale de Rouen	3	Peinture	2	500000
Guitare	1	Sculpture	1	80000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(dans cette table on peut lire que *L'Adoration des Mages* est une peinture de Léonard de Vinci, exposée aux Uffizi, et estimée à 1 000 000 € )

Les estimations<sup>1</sup> se feront par des nombres entiers.

1. Donner un code SQL permettant de créer la table **Artistes**, et d'y ajouter sa première ligne (on mettra une clé primaire si cela semble pertinent).
2. On suppose la table **Musées** créée, et dans laquelle on a déclaré le champ **id\_Musée** comme clé primaire. Quelles clés étrangères doit-on mettre sur cette base de données ?
3. Il ne vous aura pas échappé que Monet est un peintre du 19ème siècle. Corriger cette erreur sur la table **Artistes** à l'aide d'une commande SQL.
4. Donner des requêtes SQL permettant de :
  - (a) Lister les noms des artistes français.
  - (b) Renvoyer les noms et pays des musées, classés par prix décroissant.
  - (c) Afficher l'estimation moyenne de toutes les peintures présentes dans cette table.
  - (d) Afficher les titres des peintures de Léonard de Vinci.
  - (e) Lister les titres et estimations des sculptures exposées en France.
  - (f) Lister les musées où on peut voir une œuvre de Picasso à 18h.

<sup>1</sup>Désolé pour cette colonne basement matérielle.

## Exercice 4

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ , dont on note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Partie A

- (a) Calculer  $A^2$  puis vérifier que  $A^3$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .  $f$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ?  
(b) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $f$ .

- Soient  $e'_1 = (-1, -1, 1)$ ,  $e'_2 = (2, -1, 1)$  et  $e'_3 = (-1, 2, 1)$ .

(a) Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .

(b) Démontrer que la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- On pose :  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $h$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $M$ .

- Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $M = \alpha A + \beta I$ , où  $I$  est la matrice identité d'ordre 3.
- Déterminer la matrice  $M'$  de  $h$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- En déduire que  $M$  est inversible.
- À l'aide de la question 1a), calculer  $(M - I)^3$ . En déduire l'expression de  $M^{-1}$  en fonction des matrices  $I$ ,  $M$  et  $M^2$ .
- À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer  $M^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $I$ ,  $A$  et  $A^2$ .  
Cette formule est-elle vérifiée pour  $n = -1$  ?

### Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g \circ g = f$ .  
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice  $V$  carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note  $g$  l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $V$ .

- Montrer que  $VT = TV$ . En déduire que  $g \circ f = f \circ g$ .
- Montrer que  $g(e'_1)$  appartient au noyau de  $f$ .  
En déduire qu'il existe un réel  $a$  tel que  $g(e'_1) = a e'_1$ .
  - Montrer que  $g(e'_2) - a e'_2$  appartient aussi au noyau de  $f$ .  
En déduire qu'il existe un réel  $b$  tel que  $g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2$ .
  - Montrer que :  $(f \circ g)(e'_3) = (g \circ f)(e'_3) = a e'_2 + b e'_1$ .  
En déduire que  $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2$  appartient au noyau de  $f$ .
  - En déduire qu'il existe un réel  $c$  tel que :  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .
- Calculer  $V^2$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , puis en utilisant l'hypothèse  $V^2 = T$ , obtenir une contradiction.