

CorrigéExercice 1Partie I

1°)  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$  comme composée de fonctions continues sur cet intervalle

$$\text{De plus, } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - t \ln(t) = 0 = \underline{\underline{f(0)}}$$

$\rightarrow 0$  par croissance comparée

donc  $f$  est continue en  $0$ .

Enfinement,  $f$  est continue sur  $\overline{[0, +\infty[}$

2°) De  $\hat{f}_m$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  comme composée de  $\mathcal{C}^2$ .

$$\forall t > 0: f'(t) = 2t - 1 \times \ln(t) - t \times \frac{1}{t}$$

$$f'(t) = \underline{2t - \ln(t) - 1}$$

$$\text{et } f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \underline{\underline{\frac{2t-1}{t}}}$$

3°) Avec  $t > 0$  on voit que  $f''(t) > 0 \Leftrightarrow 2t - 1 > 0$   
 $\Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$

d'où les tableaux suivants:

| t             | 0 | $\frac{1}{2}$                 | $+\infty$          |
|---------------|---|-------------------------------|--------------------|
| $f''(t)$      |   | -                             | +                  |
| $f'(t)$       |   | $\searrow$<br>1<br>$\nearrow$ |                    |
| Signe $f'(t)$ |   | +                             |                    |
| $f(t)$        |   |                               | $\nearrow +\infty$ |

$$(f'(1) = 2 - \ln(1) - 1) = 1$$

$f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On a :  $f(t) = t^2 \left( 1 - \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  par croiss. comp.

4°) De  $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1$  on tire  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = +\infty$

et donc  $\mathcal{C}$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0, qui est bien 0 car  $f(0) = 0$

4b.  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion si  $f''$  s'annule et change de signe (car  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ )

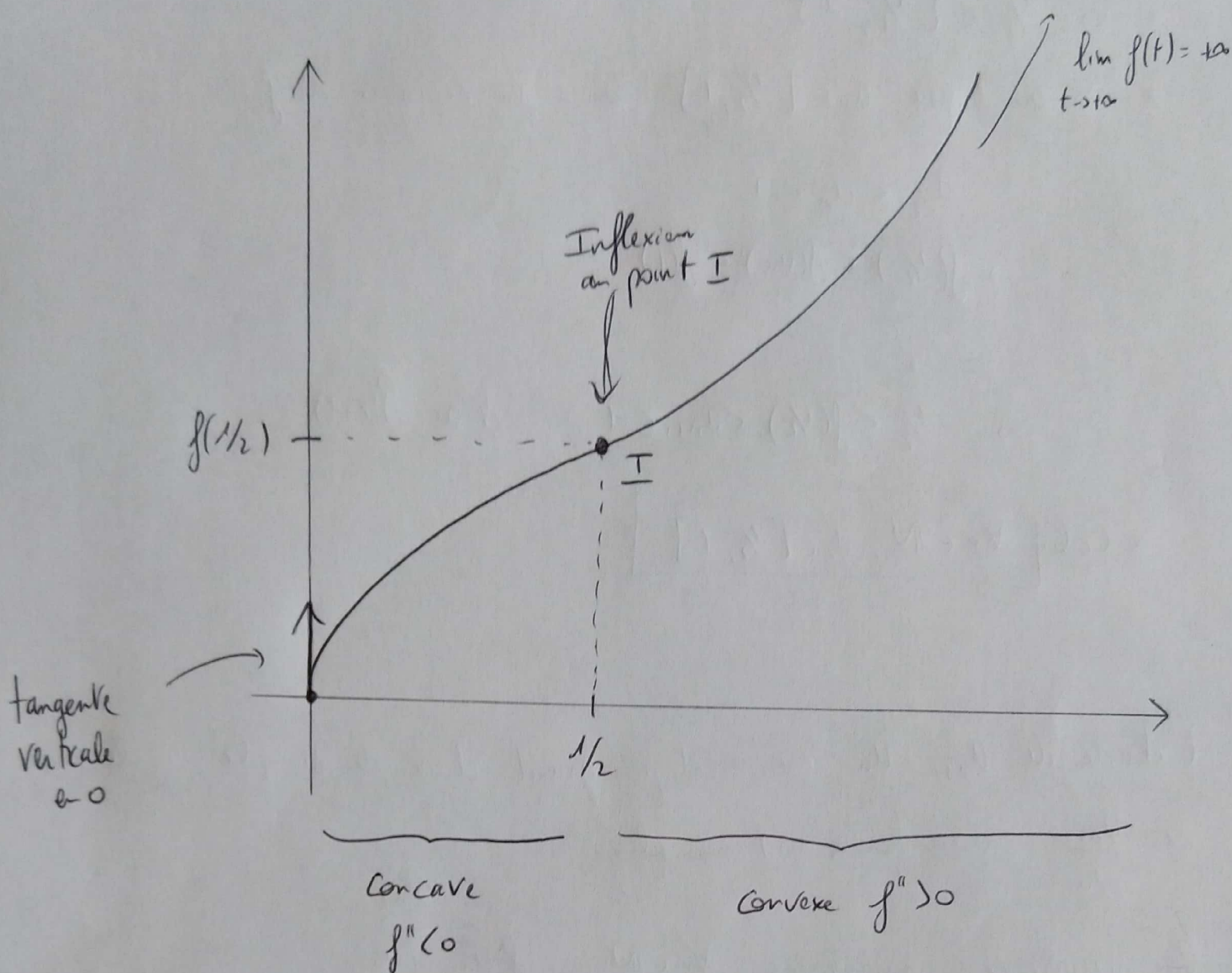
C'est le cas ici.  $\mathcal{C}$  admet un unique point d'inflexion à l'abscisse  $\frac{1}{2}$

donc au point  $I = \left( \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \right)$



4c. Mais de ces informations on peut donner l'allure suivante :

(2)



$$\frac{1}{4} + \frac{h(2)}{2} \approx 0,25 + 0,35 \approx \underline{0,6}$$

[Rappel: sur ces traces, essayez-vous de faire apparaître les résultats de questions précédentes].

50)

On reprend le tableau de variations de la question 3.

On voit que  $f$  est continue, strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ; donc réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[0, +\infty[$ .

$\uparrow$  valeur  
 $\uparrow$  lim. en  $+\infty$   
 $\uparrow$

$1 \in [0, +\infty[$ ; donc  $\exists ! x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(x) = 1$ .

Il suffit ensuite de remarquer que  $f(1) = 1$  pour constater que  $\boxed{x=1}$  (par unicité)

6. Par récurrence: (évidemment!) Soit  $P(n)$ : " $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ "

\*  $u_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$

\* Si on suppose  $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ , on a par croissance de  $f$ .

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \underline{f(\frac{1}{2})} \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\simeq 0,6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(\frac{1}{2}) \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{d'après } P(n+1).$$

\* C.P.:  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1].}$

7. L'étude de  $u_{n+1} - u_n$  ne rend pas grand-chose de simple; celle de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  ( $(u_n) \text{ à term } > 0$ ) non plus.

Par récurrence: montrons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\overbrace{f(u_{n+1})}^{P(n)} \geq u_n$

•  $u_1 = f(\frac{1}{2}) \simeq 0,6 \geq \frac{1}{2} = u_0$  donc  $P(0)$  est vraie.

• si  $u_{n+1} \geq u_n$ , par croissance de  $f$  on a  $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$   
donc  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

ce qui donne l'hérédité

• On conclut que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$   $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

8.  $(u_n)$  est croissante, majorée par 1, donc converge vers  $l \in [\frac{1}{2}, 1]$



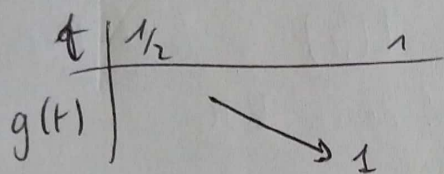
8. Par continuité de  $f$  en  $0$ ,  $+\infty[$  donc en  $[\frac{1}{2}, 1]$ , la (3)  
théorème du point fixe donne

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = l^2 - l \ln(l) \quad (l \neq 0, \text{ donc } f(l) = l^2 - l \ln(l))$$

$$\Leftrightarrow 1 = l - \ln(l) \quad \text{en simplifiant par } l \neq 0$$

On cherche donc les solutions de  $l - \ln(l) = 1$  en  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

Posez  $g: t \mapsto t - \ln(t) : g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} < 0$  en  $[\frac{1}{2}, 1[$



Donc par stricte décroissance de  $g$ ,  $g(t) = 1$  a pour unique sol<sup>n</sup>  $t = 1$

On conclut donc :  $\boxed{l = 1}$ .

9. `import numpy as np`

`u = 1/2`

`N = 0`

`while 1 - u >= 10**(-4) :`

`u = u**2 - u * np.log(u)`

`N = N + 1`

`print(N)`

## Exercice II (d'après ETL 2014)

### Partie 1

1) import numpy, random as rd

def experience(n):

trage = rd.randint(1, n+1, n+1)

k = 1

# on attaque au second trage

while trage[k] < trage[k-1]:

# on compare le trage au précédent

k = k+1

return k+1

# attention L[k] est le (k+1)-ième élément de la liste.

2a) On a  $(X_3=4)$  si les 4 trages sont de la forme

3 - 2 - 1 - ... où la 4<sup>e</sup> boule est quelconque -

Ainsi :  $(X_3=4) = (N_1=3) \cap (N_2=2) \cap (N_3=1)$

Les trois trages étant indépendants (remise ...), les  $N_k$  sont mutuellement indépendants

et on a donc

$$P(X_3=4) = P(N_1=3) \times P(N_2=2) \times P(N_3=1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \text{ par tirage équiprobable de l'urne contenant } 3 \text{ boules}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X_3=4) = \frac{1}{27}}$$



2b. On a  $X_3 = 2$  ssi la seconde boule est supérieure ou égale à la première (4)

Donc ssi les deux premiers tirages donnent

1-1 ou 1-2 ou 1-3 ou 2-2 ou 2-3 ou 3-3.

(6 possibilités)

On a  $3 \times 3 = 9$  tirages possibles pour les deux premières boules, et ils sont équiprobables

$$\text{donc } \boxed{P(X_3 = 2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}}$$

Enfin,  $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$  donc  $P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4)$

$$= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27}$$

$$= \frac{27 - 18 - 1}{27}$$

$$\boxed{P(X_3 = 3) = \frac{8}{27}}$$

$$3) E(X_3) = 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27}$$

$$= \frac{36 + 24 + 4}{27}$$

$$\boxed{E(X_3) = \frac{64}{27}}$$

(NB: variables à support fini  
donc pas de problématique  
de cv ici)

4)  $N_k$  est le numéro d-1 boule tirée de manière équiprobable

ds  $\boxed{\begin{matrix} (1) & (2) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & (n) \end{matrix}}$  donc  $\boxed{N_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)}$

et  $\boxed{E(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(N_k) = \frac{n^2-1}{12}}$

5) On s'inspire de 2a.

$(X_n = n+1)$  est le cas le plus "défavorable": chaque tirage est  $<$  au précédent jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

Ceci correspond aux tirages

$n, (n-1), (n-2), \dots, 2, 1, \dots$  où la  $(n+1)$ -i<sup>ème</sup> boule tirée est quelconque.

d'où

$$(X_n = n+1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n-1) \cap \dots \cap (N_n = 1)$$

et par équiprobabilité / indépendance des  $N_i$  (voir en 2a) :

$$\boxed{P(X_n = n+1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

(NB: pour  $n=3$ , on retrouve  $P(X_3=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ )

6°) Sachant  $(N_1 = i)$ , on obtient  $(X_n = 2)$ ssi la seconde boule tirée est  $\geq i$ ; donc ssi  $N_2$  prend une valeur dans  $\llbracket i, n \rrbracket$ .

Il y a donc  $n-i+1$  valeurs possibles pour  $N_2$ ; par équiprobabilité.

$$\boxed{P_{(N_1=i)}(X_n=2) = \frac{n-i+1}{n}}$$



7. On applique la probabilité totale avec le système complet d'événements  $(N_1=i)_{1 \leq i \leq n}$ :

$$P(X_n=2) = \sum_{i=1}^n P(N_1=i) P_{(N_1=i)}(X_n=2)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{n-i+1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$P(X_n=2) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \underline{\underline{\frac{n+1}{2n}}}$$

Astuce : poser  $k=n-i+1$

$$i=1 \rightarrow k=n$$

$$i=n \rightarrow k=1$$

... mais on peut découper

$$\text{en } \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \text{ et}$$

conclure.

(et pour  $n=3$  on retrouve  $P(X_3=2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ )

8. Question difficile!

On a  $(X_n > k)$  si les numéros des  $k$  premiers boules forment une suite strictement décroissante; donc  $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$

On veut dénombrer le nombre de telles suites. On observe alors qu'il y en a autant que de parties à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (car les éléments distincts déterminent entièrement la suite, il suffit de les classer par ordre décroissant)

Si on s'intéresse aux  $k$  premiers tirages, on est en situation d'équiprobabilité, et:

\* il y a  $n^k$  tirages possibles ( $n$  boules possibles à chaque tirage)

\* il y a  $\binom{n}{k}$  tirages donnant  $(X_n > k)$  d'après l'analyse précédente.

$$\text{Donc } \boxed{P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}}$$

Pour  $k=0$ , ceci se écrit:  $P(X_n > 0) = \frac{1}{n^0} \binom{n}{0} = 1$  : c'est vrai car

$$X_n(\omega) \in \mathbb{I} 2, +\infty \mathbb{I}$$

et pour  $k=1$  on obtient  $P(X_n > 1) = \frac{1}{n} \binom{n}{1} = 1$  ; vrai par la même raison.

On conclut donc :  $\forall k \in \mathbb{I} 0, n \mathbb{I}$ ,  $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

9. Ici on attend (je pense...) une démo.

Pour  $k \in \mathbb{I} 2, n+1 \mathbb{I}$ , on a l'égalité entre évènements:

$$(X_n > k-1) = (X_n = k) \cup (X_n > k)$$

↑  
disjointe

$$\text{Donc } P(X_n > k-1) = P(X_n = k) + P(X_n > k)$$

$$\text{on en déduit } \boxed{P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)}$$



(6)

so.  $X_n(\omega) = \lfloor 2, n+1 \rfloor$  donc

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n = k) ; \text{ et on cherche à faire intervenir}$$

les probas  $P(X_n > k)$  : c'est la question 9!

$$\text{On a donc : } E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k (P(X_n > k-1) - P(X_n > k))$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n > k)$$

$$= \sum_{i=1}^n (i+1) P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n > k)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{i=k-1} = \underbrace{\sum_{k=1}^n k P(X_n > k)}_{(1)} + \sum_{k=1}^n P(X_n > k) - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n > k)}_{(2)} \end{aligned}$$

Dans la différence ①-②, tous les termes s'annulent sauf le terme  $k=1$  de ① et le terme  $k=n+1$  de ② ; d'où,

$$E(X_n) = \underbrace{P(X_n > 1)}_{=1} + \sum_{k=1}^n P(X_n > k) - \underbrace{(n+1) P(X_n > n+1)}_{=0}$$

$$\boxed{E(X_n) = 1 + \sum_{k=1}^n P(X_n > k) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)}$$

en observant  $P(X_n > 0) = 1$

11. D'après la formule vue en 8°) (et même pour  $\forall k \in \underline{\underline{[0, n]}}$ ) :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \text{ et on pressent une formule du binôme :}$$

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k (1)^{n-k} = \underline{\underline{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}}$$

( pour  $n=3$  on trouve  $E(X_3) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$  : en accord avec la question 3. )

12. le coup classique (mais on aura la justificat° propre en fin d'année...)

$E(X_{10})$  ~~est~~ peut s'approximer par la moyenne d'un grand nombre de tirage de  $X_{10}$ .

On fait donc tourner 10000 fois (par ex.) la fonction expérience avec  $n=10$ .

```

S = 0
for k in range(10000):
    S = S + experience(10)
print(S / 10000)

```



### Exercice 3

(7)

- 1) "id-Artiste" est créée pour servir de clé primaire !

```
CREATE TABLE Artistes (  
  id-Artiste INTEGER PRIMARY KEY,  
  Nom-Artiste TEXT,  
  Pays TEXT,  
  Siècle INTEGER)
```

puis :

```
INSERT INTO Artistes  
VALUES (1, 'Picasso', 'Espagne', 20)
```

- 2) les clés étrangères sont les colonnes qui renvoient à des "entités" identifiées dans d'autres tables. Ici cela se passe dans la table Oeuvres :

- \* la colonne Auteur est une clé étrangère qui fait référence à la clé primaire id-Artiste (table Artistes)
- \* la colonne Musée renvoie à id-Musée.

donc on créera cette table par :

```
CREATE TABLE Oeuvres (  
  ...  
  FOREIGN KEY Auteur REFERENCES Artistes (id-Artiste)  
  ...  
  FOREIGN KEY Musée REFERENCES Musées (id-Musée)  
  ... )
```

3) Modification par UPDATE :

```
UPDATE Artistes  
SET Siècle = 19  
WHERE Nom-Artiste = 'Monet'
```

- 4) a. SELECT ~~Nom~~ FROM Artistes WHERE Pays = 'France'
- b. SELECT Nom-Musée, Pays FROM Musées ORDER BY Prix DESC
- c. SELECT AVG(Estimation) FROM Oeuvres WHERE Genre = 'Peinture'
- d) Jointure!! pour relier la table des œuvres et celle des artistes.

```
SELECT Titre
```

```
FROM Oeuvres INNER JOIN Artistes
```

```
ON Artistes.id-Artiste = Oeuvres.Auteur
```

```
WHERE Genre = 'Peinture' AND Nom-Artiste = 'Léonard de Vinci'
```

- e) Cette fois on joint Oeuvres et Musées en suivant la correspondance donnée par la clé étrangère.

```
SELECT Titre, Estimation
```

```
FROM Oeuvres INNER JOIN Musées
```

```
ON Musées.id-Musée = Oeuvres.Musée
```

```
WHERE Pays = 'France' AND Genre = 'Sculpture'
```

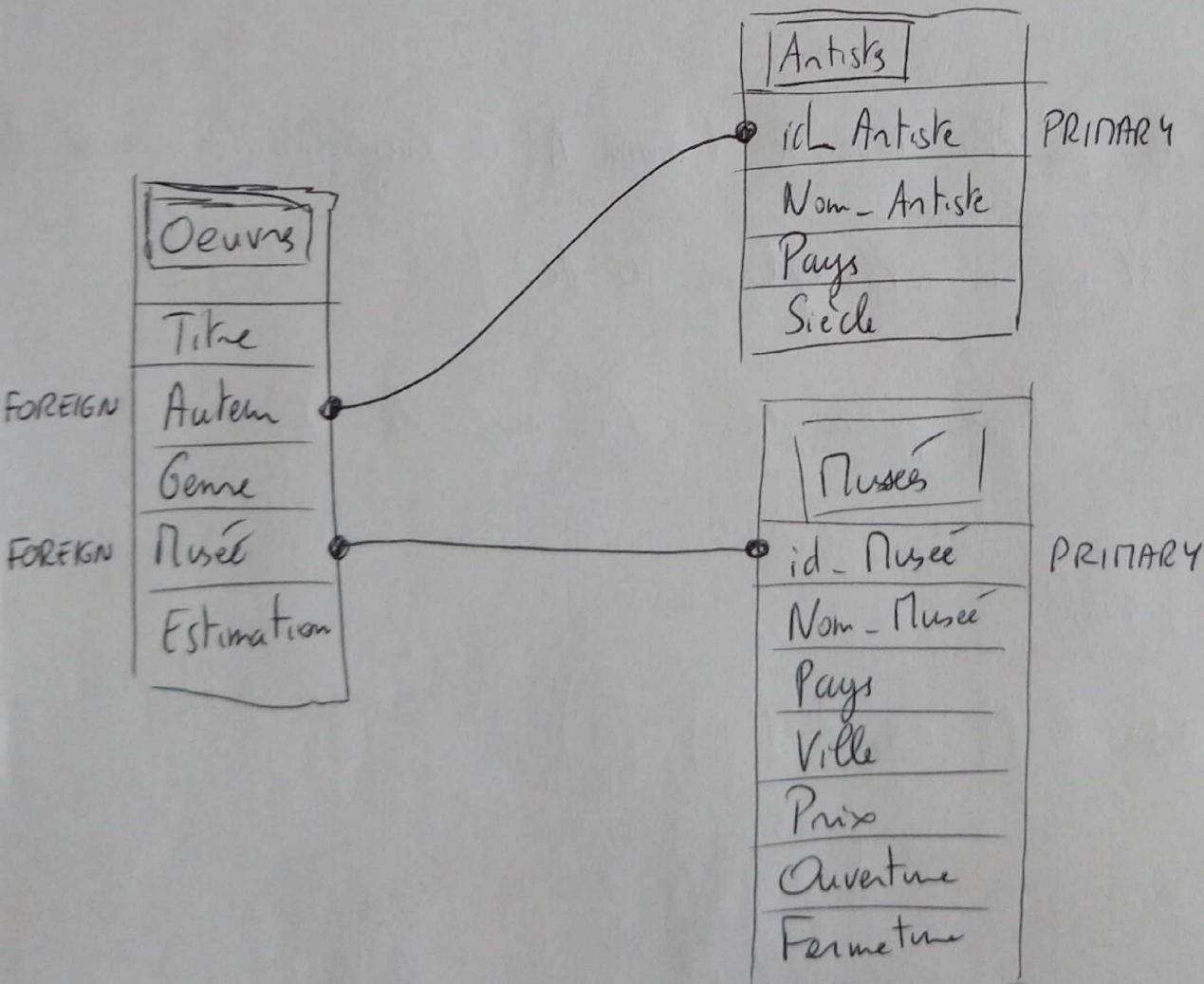


f. Cette fois, double jointure ...

(8)

```
SELECT Nom-Musée
FROM Oeuvres INNER JOIN Artists ON Oeuvres.Auteur =
                                     Artists.id_Artiste
      INNER JOIN Musées ON Oeuvres.Musée =
                           Musées.id_Musée
WHERE Nom-Artiste = 'Picasso' AND Ouverture < 18
      AND Fermeture > 18.
```

NB: Schéma de la base que j'aurais dû faire dès le départ:



# Exercice 4 (ÉCRITURE 2019)

## Partie A

$$1) a. \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{donc } A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et en vérifiant } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = O_{3(\mathbb{R})} \quad \left| \begin{array}{l} \text{on conclut que } A^3 \\ \text{est la matrice nulle} \end{array} \right|$$

$A$  ne peut donc pas être inversible (si non  $A^3$  le serait aussi; or elle est nulle)

donc  $f$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$

(NB:  $A$  contient 2 lignes opposées donc n'est pas inversible...)

2) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{On a } (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

(ici comme on a des "=" on peut évaluer le  $\frac{1}{3}$ )



$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 2y + z = y \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{Ker}(f) = \{(y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, -1))$$

$\{(1, 1, -1)\}$  est 1 famille génératrice de  $\text{Ker}(f)$   
libre car 1 vecteur non nul

donc c'est une base de  $\text{Ker}(f)$  ; et donc  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$

2°) On teste la liberté.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tq

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0, 0, 0).$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \lambda_2 \leftarrow \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \lambda_3 \leftarrow \lambda_3 + \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est libre}$$

Or cette famille est de cardinal  $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$  :

c'est une base de  $E$

2b. Il s'agit de calculer  $f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$ .

On peut utiliser A :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{f(e'_1) = (0, 0, 0)}$$

$$\text{« } \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{f(e'_2) = (-1, -1, 1) = e'_1}$$

$$\text{« } \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{f(e'_3) = e'_2}$$

On obtient bien  $\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} = \underline{\underline{T}}.$

$$\begin{aligned} 3a. \alpha A + \beta I &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha & -2\alpha \\ \alpha & \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta & 2\alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha + 3\beta & -2\alpha \\ \alpha & \alpha & 2\alpha + 3\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En regardant les deux premières coefficients, on cherche  $\alpha, \beta$  tq

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 4 \\ 2\alpha = -2 \end{cases} \text{ donc } \alpha = -1, \beta = 1 \text{ sv la seule solution possible.}$$

et on voit effectivement que  $\underline{\underline{M = I - A}}$



3b.  $M = \alpha A + \beta I = I - A$

(10)

donc en passant aux endomorphismes (dans la base  $B$ ):

$$h = \text{Id} - f$$

et en repassant aux matrices de  $B'$ :

$$M' = I_3 - T$$

donc 
$$\underline{\underline{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

3c.  $M'$  est inversible (triangulaire, à coeff diagonaux non nuls); donc  $h$  est un automorphisme; donc  $\Pi$ , qui est aussi une matrice de  $h$ , est inversible.

3d.  $\Pi = I - A$  donc  $\Pi - I = -A$   
et  $(\Pi - I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = \underline{\underline{0}}$  d'après 1a.

Ceci s'écrit aussi ( $\Pi$  et  $I$  commutent):

$$\Pi^3 - 3\Pi^2 + 3\Pi - I = 0$$

$$\text{on } I = \Pi^3 - 3\Pi^2 + 3\Pi = \Pi(\Pi^2 - 3\Pi + 3I)$$

et on en déduit:

$$\boxed{\Pi^{-1} = \Pi^2 - 3\Pi + 3I}$$

3e.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = (I - A)^n$ .  $I$  et  $A$  commutent, donc le binôme de Newton donne:

$$M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k}$$

$$M^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} A^k$$

On :  $A^3 = 0$ ; donc  $\forall n \geq 3$ ,  $A^n = A^3$ ,  $A^{n-3} = 0$

et la somme s'arrête à 2 (pour  $n \geq 2$  !!)

$$\boxed{\forall n \geq 2, M^n = \underbrace{I}_{k=0} - \underbrace{nA}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} A^2}_{k=2}}$$

pour  $n=0$ ,  $M^0 = I$

$n=1$   $M^1 = M = I - A$

} donc l'encadrement est encore vrai pour ces deux valeurs.

Pour  $n = -1$ , la formule trouvée s'écrit:

$$M^{-1} = I + A + A^2$$

soit encore  $M^{-1} = I + (I - M) + (I - M)^2$

$$= I + I - M + I^2 - 2M + M^2$$

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I \quad : \text{civ} \underline{\underline{M^2}} \text{ d'après 3d.}$$



1) Si  $V^2 = T$ , alors  $VT = V \cdot V^2 = V^3$   
 $TV = V^2 V = V^3$  donc  $\boxed{VT = TV}$

On  $VT = \text{Mat}(g \circ f, B')$   
 $TV = \text{Mat}(f \circ g, B')$  donc on en conclut  $\boxed{g \circ f = f \circ g}$

2a. Calculons :  $f(g(e'_1)) = (f \circ g)(e'_1) = (g \circ f)(e'_1)$   
 $= g(\underbrace{f(e'_1)}_{=0})$   
 $= g(\underbrace{0}_{\mathbb{R}^3}) = \underline{\underline{0_{\mathbb{R}^3}}}$

$f(g(e'_1)) = (0, 0, 0)$  donc  $\boxed{g(e'_1) \in \text{Ker}(f)}$

Mais d'après 1b, on sait que  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1) \dots$   
 donc  $g(e'_1)$  est forcément colinéaire à  $e'_1$ .

$\boxed{\text{Il existe bien } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(e'_1) = a e'_1}$

2b. C'est assez similaire :

$f(g(e'_2) - a e'_2) = (f \circ g)(e'_2) - a f(e'_2)$  par linéarité de  $f$   
 $= g(f(e'_2)) - a e'_1$  car  $f \circ g = g \circ f$  et  $f(e'_2) = e'_1$   
 $= g(e'_1) - a e'_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$

donc on a encore à conclure

$$g(e'_2) - ae'_2 \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}(e'_1)$$

$$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}, g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists b \in \mathbb{R}, g(e'_2) = ae'_2 + be'_1}$$

2c. Et encore une fois!

$$\begin{aligned} (f \circ g)(e'_3) &= (g \circ f)(e'_3) \quad (f \text{ et } g \text{ commutent}) \\ &= g(f(e'_3)) \\ &= g(e'_2) \\ &= ae'_2 + be'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) &= (f \circ g)(e'_3) - af(e'_3) - bf(e'_2) \\ &= ae'_2 + be'_1 - ae'_2 - be'_1 \\ &= 0_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 \in \text{Ker}(f)$$

~~on a encore à conclure~~

$$2d.) \dots \text{ et on décide à nouveau : } \boxed{\exists c \in \mathbb{R}, g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.}$$



2a. Récapitulons :

$$g(e'_1) = ae'_1$$

$$g(e'_2) = ae'_2 + be'_1$$

$$g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Mat}(g, B') = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = V}$$

3) Avec cette dernière matrice :

$$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Si on suppose  $V^2 = T$ , on a en regardant les coeff diagonaux

$$\underline{a^2 = 1}$$

et en regardant le coeff (1,2) :

$$\underline{2ab = 1}$$

$$a = 0 \text{ et } 2ab = 1$$

$\Rightarrow$  Contradiction !

Il n'existe donc pas de matrice  $V$  tq  $V^2 = T$ .

Si il existait  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tq  $g^2 = f$ , on aurait  $(\text{Mat}(g, B'))^2 = \text{Mat}(f, B') = T$

et on vient de voir que ceci est impossible

$\Rightarrow$  Il n'existe aucun  $g \in \mathcal{L}(E)$  tq  $g \circ g = f$