

Concours Blanc n°1  
Maths 2  
1/12/2022  
Durée : 4h

## Exercice 1

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $f_n$  la fonction définie par:  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \ln(x)$ .

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.  
(b) En déduire, lorsque  $n$  est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels  $u_n$  et  $v_n$ , solutions de l'équation  $f_n(x) = 0$ , et vérifiant  $0 < u_n < n < v_n$ .
2. Étude de la suite  $(u_n)_{n \geq 3}$ .
  - (a) Montrer que  $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$ .
  - (b) Montrer que  $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ , puis en conclure que  $(u_n)$  est décroissante.
  - (c) En déduire que  $(u_n)_{n \geq 3}$  converge et montrer, en encadrant  $\ln(u_n)$ , que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .
  - (d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$ ; en déduire que  $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
3. Étude de la suite  $(v_n)_{n \geq 3}$ .
  - (a) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
  - (b) Calculer  $f_n(n \ln(n))$  puis montrer que :  $\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n$ .
  - (c) Soit  $g$  la fonction définie par:  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x - 2 \ln(x)$ .  
Étudier  $g$  et donner son signe. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$ .
  - (d) En déduire le signe de  $f_n(2n \ln(n))$ , puis établir que :  $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$ .
  - (e) Montrer enfin que :  $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

## Exercice 2

À tout triplet  $(a, b, c)$  de réels, on associe la matrice  $M(a, b, c)$  définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par  $E$  l'ensemble des matrices  $M(a, b, c)$  où  $a, b, c$  sont des réels. Ainsi :

$$E = \left\{ M(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

### Recherche d'une base de $E$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices carrées réelles d'ordre 3.
2. Donner une base de  $E$  ainsi que sa dimension.

### Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$ .

On pose  $J = M(1, 1, 1) - I_3$ , où on note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

3. Calculer les matrices  $J^2, J^3$ . En déduire l'expression de  $J^n$ , pour tout entier naturel  $n \geq 3$ .

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers  $n = 0$  et  $n = 1$  ?

5. En déduire l'écriture matricielle de  $[M(1, 1, 1)]^n$ .

### Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$ .

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est la matrice  $M(1, 1, 2)$ . On définit la famille de vecteurs  $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$  par :

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (0, 1, 0), \quad w = (2, 1, 1)$$

6. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Donner l'expression de  $f(x, y, z)$ .
7. Démontrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
8. Exprimer  $f(v)$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $u$  et  $v$ . En déduire la matrice  $T$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ .
9. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

10. Écrire la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $\mathcal{C}$ . Vérifier que la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est l'inverse de  $P$ . On note donc  $Q = P^{-1}$ .
11. Donner (en la justifiant) une relation reliant les matrices  $M(1, 1, 2)$ ,  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $T$ .
12. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, [M(1, 1, 2)]^n = PT^nP^{-1}$ .

### Exercice 3

On admet dans cet exercice la formule suivante : pour tout  $x \in ]0, 1[$ , pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Soient  $n$  et  $r$  des entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un jet est  $1-x$  et celle d'obtenir Face est  $x$  (avec  $0 < x < 1$ ). Les jets sont supposés indépendants.

On pose :

- $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient Pile au cours des  $n$  premiers jets ;
- $T_r$  la variable aléatoire donnant le numéro du jet où on obtient Pile pour la  $r$ -ième fois.
- $P_n$  l'événement « obtenir un Pile au  $n$ -ième jet de pièce »,
- $F_n$  l'événement « obtenir un Face au  $n$ -ième jet de pièce ».

1. Préciser la loi de  $S_n$ . Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
2. Préciser la loi de  $T_1$ . Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

3. On cherche ici à donner la loi de  $T_r$  ainsi que son espérance.

- (a) Déterminer  $T_r(\Omega)$ .
- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer l'égalité entre événements :

$$(T_r = k + r) = (S_{k+r-1} = r - 1) \cap P_{k+r}$$

NB : faute de frappe dans l'énoncé, qui donnait

$$(T_r = k + r) = (S_{k+r-1} = r - 1) \cup P_{k+r}$$

- (c) En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}^*, P(T_r = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1} (1-x)^r x^k$$

- (d) Vérifier que la somme des probabilités des événements  $(T_r = k + r)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{N}$ , est égale à 1.
- (e) Montrer :

$$(r+k) \binom{r+k-1}{r-1} = r \binom{r+k}{r}$$

En déduire  $E(T_r)$ .

4. On se propose ici de retrouver  $E(T_r)$  par un autre moyen. On note :

- $U_1 = T_1$  ;
- Pour tout  $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ ,  $U_i = T_i - T_{i-1}$ .

- (a) Exprimer  $T_r$  en fonction des  $U_i$ .
- (b) Quelles loi suivent les  $U_i$  ? (on donnera des éléments de justification). Retrouver  $E(T_r)$ .

5. Programmer une fonction Python  $T(x, r)$  qui renvoie un tirage de  $T_r$  définie comme dans ce problème, pour des valeurs de  $x \in ]0, 1[$  et  $r \in \mathbb{N}^*$  passées en argument.

On examine maintenant un jeu d'argent utilisant ces tirages.

Soient des réels  $a > 0$  et  $\lambda > 1$ . Un joueur parie de la façon suivante : lors du  $n^{\text{ième}}$  jet, il mise la somme  $a^{n-1}$  (en euros) et jette la pièce.

- Si Pile sort, il perd sa mise et gagne la somme  $\lambda a^{n-1}$ .
- Si Face sort, il perd sa mise.

On note  $G_n$  la variable aléatoire égale au gain net du joueur (c'est-à-dire les gains moins les pertes) après son  $n^{\text{ième}}$  succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro  $T_n$ ).

6. On suppose **dans cette question** que  $a = 1$ .

- (a) Montrer que  $G_1 = -T_1 + \lambda$ , et calculer l'espérance de  $G_1$ .
- (b) Plus généralement, exprimer  $G_r$  en fonction de  $\lambda, r$  et  $T_r$ . En déduire  $E(G_r)$ .

7. On suppose maintenant que  $a > 1$ .

- (a) En examinant les gains et pertes lors des  $T_1$  premiers lancers, montrer que  $G_1 = -\frac{1-a^{T_1}}{1-a} + \lambda a^{T_1-1}$ .
- (b) Étudier l'existence des espérances des variables aléatoires  $a^{T_1}$  et  $G_1$ . Lorsque ces espérances existent, les calculer.

8. (a) Exprimer  $G_2$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ .

- (b) Montrer que, sous les mêmes conditions qu'en 7b,  $E(a^{T_2})$  existe. Calculer cette espérance et en déduire  $E(G_2)$ .