

**Concours Blanc n°1**  
**Maths 2**  
1/12/2022  
Durée : 4h  
**HEC 2004**

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de Pile et de Face sont équiprobables.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $P_n$  l'événement « Pile apparaît au lancer de rang  $n$  » et par  $F_n$  l'événement « Face apparaît au lancer de rang  $n$  ».

### Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $a_n = P([X = n])$ .

1. (a) Justifier que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ .  
(b) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , la série de terme général  $a_n x^n$  est convergente.
2. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

- (a) Établir pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  l'égalité :

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

- (b) En déduire que la fonction  $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$  est croissante sur  $[0, 1[$  et qu'elle vérifie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1).$$

- (c) Montrer que, pour tout entier naturel  $N$  non nul, on a :  $0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$ .

En déduire que la série de terme général  $n a_n$  est convergente.

- (d) À l'aide des résultats des questions a) et c), justifier pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$ , les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$$

- (e) Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance donnée par :

$$E(X) = f'(1)$$

## Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « Pile, Pile, Face »

Soit  $Y$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Face précédé de deux Piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (Face, Face, Pile, Face, Pile, Face, Pile, Pile, Face, ...), la variable aléatoire  $Y$  prend la valeur 9.

On pose  $c_1 = c_2 = 0$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $c_n = P([Y = n])$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $B_n$  l'événement  $P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$  et  $U_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B_i$ .

3. On pose  $u_1 = u_2 = 0$ , et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $u_n = P(U_n)$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est monotone et convergente.
4. (a) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement  $B_n$ .  
(b) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, les événements  $B_n, B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.  
(c) En déduire les valeurs des nombres  $u_3, u_4$  et  $u_5$ .
5. Soit  $n$  un entier  $n$  supérieur ou égal à 5.
  - (a) Justifier l'égalité des événements  $U_n \cap B_{n+1}$  et  $U_{n-2} \cap B_{n+1}$  et préciser leur probabilité.
  - (b) Exprimer l'événement  $U_{n+1}$  en fonction des événements  $U_n$  et  $B_{n+1}$ ; en déduire l'égalité suivante :  

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
  - (c) Vérifier les égalités suivantes  $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ , et  $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$ .
  - (d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .  
On admet que ceci implique :  $P([Y = 0]) = 0$ .
6. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $v_n = 1 - u_n$ .
  - (a) Préciser les nombres  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .
  - (b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et de  $v_{n-2}$ .
  - (c) En déduire pour tout entier  $N$  supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :

$$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$$

- (d) Montrer que la série de terme général  $v_n$  est convergente et calculer sa somme.
7. Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :
 
$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$
  - (a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement  $[Y = n]$  en fonction des événements  $\overline{U_{n-1}}$  et  $U_n$  ( $\overline{U_{n-1}}$  désignant l'événement contraire de  $U_{n-1}$ ).  
En déduire l'égalité :  $c_n = v_{n-1} - v_n$ .
  - (b) Valider l'égalité  $c_n = v_{n-1} - v_n$  dans le cas où  $n$  est égal à 2 ou 3.
  - (c) Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , l'égalité :  $g(x) = (x-1)h(x) + x$ .
  - (d) Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , le quotient  $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$  en fonction de  $h(x)$ .
  - (e) Justifier la croissance de la fonction  $h$  et, pour tout entier naturel  $N$  non nul et tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$$

En déduire la relation suivante :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$$

- (f) Montrer que  $g$  est dérivable au point 1 et, à l'aide de la Partie I, en déduire que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance égale à 8.

### Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration « Pile, Pile, Face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « Face, Pile, Pile » n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration « Face, Pile, Pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « Pile, Pile, Face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.

8. Soit  $Y'$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Pile précédé d'un Pile lui-même précédé d'un Face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont : Face, Face, Pile, Face, Pile, Pile, Face, ... alors la variable aléatoire  $Y'$  prend la valeur 6.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on désigne par  $B'_n$  l'événement  $F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$ , par  $U'_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B'_i$  et on note  $u'_n$  la probabilité de  $U'_n$ .

- (a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

Les événements  $B'_n, B'_{n+1}$  et  $B'_{n+2}$  sont-ils deux à deux incompatibles?

- (b) En déduire que, si on pose  $u'_1 = u'_2 = 0$ , le même raisonnement que dans la Partie II, conduit à l'égalité  $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3.

- (c) En déduire l'égalité des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(u'_n)_{n \geq 1}$ .

- (d) Prouver que les deux variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$  suivent la même loi et vérifient :  $E(Y) = E(Y')$ .

9. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $G_n$  l'événement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang  $n$  » et  $g_n$  la probabilité de  $G_n$ .

- (a) Calculer  $g_3$  et  $g_4$  et établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante :  $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

- (b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.

10. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on désigne par  $d_n$  la probabilité que lors des  $n$  premiers lancers n'apparaissent jamais deux Piles consécutifs.

- (a) Préciser  $d_1$  et  $d_2$ .

- (b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

- (c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on ait :  $d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$ .

- (d) En déduire que la série de terme général  $d_n$  converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$$

11. On désigne par  $T$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

- (a) Justifier, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_n$$

(b) En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité :

$$P([T = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n$$

(c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

12. Calculer la probabilité que le joueur  $J'$  soit déclaré gagnant et conclure.

13. Si la configuration gagnante du joueur  $J$  avait été « Pile, Pile, Face, Pile, Pile, Face », et la configuration gagnante du joueur  $J'$  avait été « Face, Face, Pile, Face, Face, Pile », quelle aurait été la conclusion ?

14. Soit  $d$  et  $t$  les fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T = n]) x^n$$

(a) Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  l'égalité suivante :

$$t(x) = (x - 1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2 - x)} \right) + x$$

(b) Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , le quotient  $\frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$  en fonction de  $d(x)$ .

(c) En s'inspirant de la question 7e de la Partie II, justifier l'égalité suivante :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$$

(d) Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance et préciser  $E(T)$ .

## Partie IV : simulation informatique

Dans cette partie on simule le jeu sur Python.

On convient de représenter Pile par 1 et Face par 0.

Dans le code de la question 17, la liste L représentera à tout instant de l'exécution du programme les résultats des trois derniers lancers de pièce. Ainsi si les trois premiers lancers donnent « Pile, Pile, Face » on aura initialement  $L=[1, 1, 0]$  ; si ensuite le quatrième lancer donne Pile, L sera modifiée en  $L=[1, 0, 1]$ .

15. Écrire la liste L1 représentant la séquence gagnante pour le joueur J ; et la liste L2 la séquence gagnante pour le joueur J'.
16. Pour quelles valeurs de n, p et m la commande

```
rd.binomial(n,p,m)
```

renverra-t-elle une liste à 3 composantes, valant chacune 0 ou 1 de manière équiprobable, et mutuellement indépendantes ?

17. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce jeu, et renvoie 1 si le joueur J gagne et 2 si le joueur J' gagne.

*On rappelle qu'on peut tester l'égalité de deux listes Python L1 et L2 par :  $L1 == L2$  ; et donc leur non-égalité par :  $L1 != L2$ .*

```
def PPFvsFPP():
    L1 = ... # liste gagnante pour J
    L2 = ... # liste gagnante pour J'
    L = list(rd.binomial(... , ... , ...)) # trois premiers tirages
    while ... and ... :
        ... # ici on effectue un nouveau lancer de pièce
        ... # et on met à jour la valeur de L
        ...
    if ... :
        return 1
    else :
        return 2
```

*NB : le nombre de lignes à écrire à l'intérieur de la boucle while n'est pas imposé.*

18. La fonction suivante renvoie une liste à deux composantes. Prévoir leur valeur approximative (et justifier votre réponse).

```
def CB():
    C=np.zeros(2)
    for k in range(100000):
        if PPFvsFPP()==1:
            C[0]=C[0]+1
        else:
            C[1]=C[1]+1
    return C/100000
```