

## Concours Blanc n°1 Corrigé

HEC 2004

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de Pile et de Face sont équiprobables.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $P_n$  l'événement « Pile apparaît au lancer de rang  $n$  » et par  $F_n$  l'événement « Face apparaît au lancer de rang  $n$  ».

### Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $a_n = P(X = n)$ .

1. (a) Justifier que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ .

$X$  étant à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$  ; de plus les  $P(X = n)$  sont positifs (ce sont des probabilités).

- (b) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , la série de terme général  $a_n x^n$  est convergente.

Si  $x \in [0, 1]$ , on a, pour tout  $n$ ,  $0 \leq x^n \leq 1$ , et donc  $0 \leq a_n x^n \leq a_n$ .

D'après la question précédente,  $\sum a_n$  est convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum a_n x^n$  est convergente.

2. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

- (a) Établir pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  l'égalité :

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} &= \frac{1}{1 - x} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \end{aligned}$$

en reconnaissant la formule d'une somme géométrique (valable car  $x \neq 1$ ).

- (b) **En déduire que la fonction  $x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$  est croissante sur  $[0, 1[$  et qu'elle vérifie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  les inégalités suivantes :**

$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1)$$

Notons  $\varphi : x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ .

Comme on a une somme infinie, on ne peut pas dériver sans se poser de questions : le plus simple est de revenir à la définition de la croissance.

Soient  $0 \leq x \leq y < 1$  : on a  $\varphi(y) - \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} (y^k - x^k) \right)$  ; quantité positive car les  $a_n$  le sont et  $y \geq x$ .

Pour  $y \geq x$  on a bien  $\varphi(y) \geq \varphi(x)$  :  $\varphi$  est bien croissante.

$\varphi$  est croissante, tend vers  $f'(1)$  pour  $x \rightarrow 1^-$  : on peut conclure que  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $\varphi(x) \leq f'(1)$ .

Enfin l'expression de  $\varphi$  montre directement que si  $x \in [0, 1[$ , alors  $\varphi(x) \geq 0$  (les  $a_n$  sont positifs).

- (c) **Montrer que, pour tout entier naturel  $N$  non nul, on a :  $0 \leq \sum_{n=1}^N na_n \leq f'(1)$ .**

**En déduire que la série de terme général  $na_n$  est convergente.**

On peut écrire, pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

Pour  $x \rightarrow 1^-$ , on a :

$$\sum_{n=1}^N \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \rightarrow \sum_{n=1}^N na_n$$

de sorte qu'en passant à la limite dans l'encadrement, il vient :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N na_n \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(1)$$

Ceci valant pour tout  $N$ , les sommes partielles de la SATP de terme général  $na_n$  sont majorées par  $f'(1)$ . On en déduit que cette série converge.

- (d) **À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$ , les inégalités suivantes :**

$$0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$$

La première inégalité est déjà vue.

D'après la question précédente, on a pour tout entier  $N \geq 1$  :

$$\sum_{n=1}^N na_n \leq f'(1)$$

ce qui donne la troisième inégalité dans la limite  $N \rightarrow +\infty$  (inégalités larges conservées).

Enfin, 2a donne :

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{x^k}_{\leq 1} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$$

et on trouve la seconde inégalité.

- (e) **Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance donnée par :**

$$E(X) = f'(1)$$

$E(X)$  existe ssi la série  $\sum nP(X = n) = \sum na_n$  cv (absolument, mais ici c'est de toute façon une SATP). Ceci est montré en 2c :  $X$  admet une espérance.

On a alors  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ .

2d donne :

$$\forall x \in [0, 1[, \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$$

et dans la limite  $x \rightarrow 1^-$ , on obtient l'encadrement

$$f'(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$$

ce qui montre que  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = f'(1)$ .

## Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit  $Y$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un Face précédé de deux Piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (Face, Face, Pile, Face, Pile, Face, Pile, Pile, Face, ...), la variable aléatoire  $Y$  prend la valeur 9.

On pose  $c_1 = c_2 = 0$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $c_n = P([Y = n])$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $B_n$  l'événement  $P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$  et  $U_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B_i$ .

3. On pose  $u_1 = u_2 = 0$ , et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $u_n = P(U_n)$ .

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est monotone et convergente.

Pour tout  $n \geq 3$  :  $U_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n+1} B_i = \left( \bigcup_{i=3}^n B_i \right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ . On en déduit  $U_n \subset U_{n+1}$ , et donc  $P(U_n) \leq$

$P(U_{n+1})$ . Donc, pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  : la suite  $(u_n)$  est croissante.

Comme les  $u_n$  sont des probabilités, la suite  $(u_n)$  est majorée par 1.

La suite  $(u_n)$ , croissante et majorée, est donc convergente.

4. (a) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement  $B_n$ .

On a  $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ . Les lancers successifs étant indépendants, les événements  $P_{n-2}, P_{n-1}, F_n$  le sont aussi ; d'où :

$$P(B_n) = P(P_{n-2}) \times P(P_{n-1}) \times P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

la dernière égalité par équiprobabilité (pièce équilibrée).

(b) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, les événements  $B_n, B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.

On a :

- $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$
- $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$
- $B_{n+2} = P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2}$

Donc  $B_{n+1} \subset P_n$  et  $B_n \subset F_n$ .  $P_n$  et  $F_n$  étant incompatibles,  $B_n$  et  $B_{n+1}$  le sont aussi.

Avec  $B_n \subset F_n$  et  $B_{n+2} \subset P_n$  ; et  $B_{n+1} \subset F_{n+1}$  et  $B_{n+2} \subset P_{n+1}$  ; on en déduit les deux autres incompatibilités.

(c) En déduire les valeurs des nombres  $u_3, u_4$  et  $u_5$ .

$$u_3 = P(U_3) = \frac{1}{8} \text{ d'après 2a ;}$$

$$u_4 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) \text{ par incompatibilité de } B_3 \text{ et } B_4 ; \text{ et avec } P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{8} \text{ on}$$

$$a \quad u_4 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{De même, } u_5 = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8}.$$

5. Soit  $n$  un entier  $n$  supérieur ou égal à 5.

- (a) Justifier l'égalité des événements  $U_n \cap B_{n+1}$  et  $U_{n-2} \cap B_{n+1}$  et préciser leur probabilité.

$$U_n \cap B_{n+1} = (B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap B_{n+1}.$$

Or  $B_{n-1}, B_n$  et  $B_{n+1}$  sont incompatibles ; donc on peut retirer  $B_{n-1}$  et  $B_n$  de l'union précédente. On en déduit

$$U_n \cap B_{n+1} = (B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{n-2}) \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$$

On voit alors que  $U_{n-2}$  est un événement concernant les lancers  $1, 2, \dots, n-2$  ; tandis que  $B_{n+1}$  concerne les lancers  $n-1, n, n+1$ . Ceci montre que  $U_{n-2}$  et  $B_{n+1}$  sont indépendants. Donc :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}) \times P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$$

- (b) Exprimer l'événement  $U_{n+1}$  en fonction des événements  $U_n$  et  $B_{n+1}$  ; en déduire l'égalité suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

On a

$$U_{n+1} = B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n \cup B_{n+1} = (B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2} \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \end{aligned}$$

- (c) Vérifier les égalités suivantes  $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$  et  $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$ .

Avec les valeurs  $u_1 = u_2 = 0$  (énoncé),  $u_3 = \frac{1}{8}$  et  $u_4 = \frac{1}{4}$  (2c), on vérifie que les relations ci-dessus sont vraies.

- (d) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

On admet que ceci implique :  $P([Y = 0]) = 0$ .

On sait d'après 1) que  $(u_n)$  converge : notons  $\ell$  sa limite. Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n \rightarrow \ell$ ,  $u_{n+1} \rightarrow \ell$ ,  $u_{n-2} \rightarrow \ell$  ; et donc la relation de récurrence fournit :

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$$

ce qui donne  $\ell = 1$ .

**Remarque : démo (devenue hors-programme) de  $P([Y = 0]) = 0$ .**

$(Y = 0)$  est l'événement : « la séquence PPF ne sort jamais » ; et d'après les définitions,  $U_n$  est l'événement : « la séquence PPF sort avant le rang  $n$  ».

La suite  $(U_n)$  est une suite croissante d'événements, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) = P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} U_i\right)$$

(c'est le *théorème de limite monotone*).

Or d'après ce qu'on a dit,  $\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} U_i\right)$  est l'événement « PPF sort à un moment donné ».

Cet événement étant donc de probabilité 1, son contraire, qui n'est autre que  $(Y = 0)$  est de probabilité nulle.

6. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $v_n = 1 - u_n$ .

- (a) **Préciser les nombres**  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .

D'après les valeurs de  $u_{1,2,3,4}$  données plus haut :

$$v_1 = v_2 = 1, v_3 = \frac{7}{8}, v_4 = \frac{3}{4}$$

- (b) **Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et de  $v_{n-2}$ .**

On a montré plus haut, pour  $n \geq 3$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

Ceci s'écrit aussi :  $1 - v_{n+1} = 1 - v_n + \frac{1}{8}(v_{n-2})$ , et on a donc

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$$

- (c) **En déduire pour tout entier  $N$  supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :**

$$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$$

Ceci peut se réécrire :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{8}v_{n-2}$$

et on peut sommer ces égalités pour  $n$  allant de 3 à  $N+2$  (avec  $N+2 \geq 3$ ) :

$$\sum_{n=3}^{N+2} (v_{n+1} - v_n) = -\frac{1}{8} \sum_{n=3}^{N+2} v_{n-2}$$

Par télescopage dans le terme de gauche et changement d'indice ( $k = n-2$ ) dans celui de droite, on trouve :

$$v_{N+3} - v_3 = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$$

et avec  $v_3 = \frac{7}{8}$  on a la bonne expression.

- (d) **Montrer que la série de terme général  $v_n$  est convergente et calculer sa somme.**

Pour  $N \geq 1$ , on a donc  $\sum_{k=1}^N v_k = 7 - 8v_{N+3}$ .

Pour  $N \rightarrow +\infty$ ,  $u_N \rightarrow 1$  donc  $v_N = 1 - u_N \rightarrow 0$ , donc  $v_{N+3} \rightarrow 0$ . On en déduit que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N v_k = 7$$

ce qui revient exactement à dire que la série de terme général  $v_n$  converge, et que sa somme vaut 7.

## 7. Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

- (a) **Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement  $[Y = n]$  en fonction des événements  $\overline{U_{n-1}}$  et  $U_n$  ( $\overline{U_{n-1}}$  désignant l'événement contraire de  $U_{n-1}$ ).**

**En déduire l'égalité :**  $c_n = v_{n-1} - v_n$ .

( $Y = n$ ) est réalisé ssi le premier PPF arrive au rang  $n$  ; donc ssi il y a eu un PPF avant le rang  $n$  (avec « avant » pris ici au sens large :  $\leq$ ) et il n'y a jamais eu de PPF avant le rang  $n-1$ .

Autrement dit  $(Y = n) = U_n \cap \overline{U_{n-1}}$ .

Comme  $U_{n-1} \subset U_n$ ,  $U_n \cap \overline{U_{n-1}} = U_n \setminus U_{n-1}$  (dessiner des patates!), et

$$P(U_n \cap \overline{U_{n-1}}) = P(U_n) - P(U_{n-1}) = u_n - u_{n-1}$$

On a donc :  $c_n = u_n - u_{n-1} = (1 - v_n) - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n$ .

- (b) **Valider l'égalité**  $c_n = v_{n-1} - v_n$  **dans le cas où  $n$  est égal à 2 ou 3.**

Pour  $n = 2$  : on a  $c_2 = 0$  d'après l'énoncé, et  $v_1 = v_2 = 1$  : on a bien  $c_2 = v_1 - v_2$ .

Pour  $n = 3$  :  $c_3 = P(Y = 3)$  est la probabilité que PPF sorte au bout de 3 lancers ; donc que les trois premiers lancers donnent PPF. On a donc  $c_3 = \frac{1}{8}$ .

D'autre part  $v_3 = \frac{7}{8}$  et  $v_2 = 1$  : on a bien  $c_3 = v_2 - v_3$ .

- (c) **Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , l'égalité :**  $g(x) = (x-1)h(x) + x$ .

Pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n) x^n$$

avec  $c_1 = 0$  et la relation de la question précédente valable pour  $n \geq 2$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} (x-1)h(x) + x &= (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x \quad \text{chgt d'indice} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n) x^n - v_1 x + x \end{aligned}$$

(on regroupe les 2 sommes en isolant le terme  $n = 1$  dans la seconde)

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n) x^n \quad (v_1 = 1)$$

et on a bien l'égalité recherchée.

- (d) **Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$ , le quotient  $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$  en fonction de  $h(x)$ .**

On a  $g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \dots$  sous réserve d'existence de cette somme, ce sur quoi l'énoncé ne s'attarde pas.

En effet, pour  $n \geq 2$ ,  $c_n = v_{n-1} - v_n$  et il est usuel que **la série**  $\sum c_n$  cv ssi **la suite**  $(v_n)$  converge, ce qui est le cas.

On peut donc bien écrire

$$g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$$

et avec  $c_1 = 0$  :

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N c_k \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N (v_{k-1} - v_k) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{v_1}_{=1} - \underbrace{v_N}_{\rightarrow 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc , pour  $x \in [0, 1[$  :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{g(x) - 1}{(x-1)} = \frac{(x-1)h(x) + x - 1}{x - 1} = h(x) + 1$$

en utilisant la formule de la question précédente.

- (e) **Justifier la croissance de la fonction  $h$  et, pour tout entier naturel  $N$  non nul et tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , la double inégalité suivante :**

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1).$$

**En déduire la relation suivante :**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1).$$

Pour tout  $n$ ,  $u_n \in [0, 1]$  car c'est une proba ; donc  $v_n \geq 0$ . Les fonctions  $x \mapsto v_n x^n$  sont donc croissantes sur  $[0, 1]$ , donc  $h$  l'est également.

On en déduit :

$$\forall x \in [0, 1], h(x) \leq h(1)$$

D'autre part, les  $v_n$  et  $x$  étant positifs on a aussi :

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^k = h(x)$$

Par théorème de la limite monotone,  $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$  existe, et on a  $\ell \leq h(1)$  avec la partie droite de l'encadrement.

De plus en faisant  $x \rightarrow 1^-$  dans la partie gauche de l'encadrement, on a, pour tout  $N : \sum_{k=1}^N v_k \leq \ell$ , et

donc dans la limite  $N \rightarrow +\infty : \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k}_{=h(1)} \leq \ell$ .

Avec ces deux inégalités, on en conclut que

$$h(1) = \ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$$

- (f) **Montrer que  $g$  est dérivable au point 1 et, à l'aide de la Partie I, en déduire que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance égale à 8.** Nous pouvons alors faire tendre  $x \rightarrow 1^-$  dans la relation :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = h(x) + 1$$

et on en conclut que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = h(1) + 1$$

et donc  $g$  est dérivable en 1, et  $g'(1) = h(1) + 1$ .

D'après la partie I,  $Y$  admet donc une espérance, et

$$E(Y) = g'(1) = h(1) + 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n + 1 = 7 + 1 = 8$$

### Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs  $J$  et  $J'$  s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur  $J$  est gagnant si la configuration « Pile, Pile, Face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « Face, Pile, Pile » n'apparaisse ;
- le joueur  $J'$  est gagnant si la configuration « Face, Pile, Pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « Pile, Pile, Face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur  $J'$  possède un net avantage sur le joueur  $J$ .

8. Soit  $Y'$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Pile précédé d'un Pile lui-même précédé d'un Face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont : Face, Face, Pile, Face, Pile, Pile, Face, ... alors la variable aléatoire  $Y'$  prend la valeur 6.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on désigne par  $B'_n$  l'événement  $F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$ , par  $U'_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B'_i$  et on note  $u'_n$  la probabilité de  $U'_n$ .

- (a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

**Les événements  $B'_n$ ,  $B'_{n+1}$  et  $B'_{n+2}$  sont-ils deux à deux incompatibles ?**

C'est assez similaire à la question analogue de la partie précédente.

$B'_n$  est une intersection d'événements comprenant  $P_{n-1}$  ; de même pour  $B'_{n+1}$  avec  $F_{n-1}$ .  $P_{n-1}$  et  $F_{n-1}$  étant incompatibles, il en va de même pour  $B'_n$  et  $B'_{n+1}$ .

De même :  $B'_n$  « contient »  $P_n$  et  $B'_{n+2}$  « contient »  $F_n$  ;

et  $B'_{n+1}$  « contient »  $P_n$  et  $B'_{n+2}$  « contient »  $F_n$ .

$B'_n$ ,  $B'_{n+1}$  et  $B'_{n+2}$  sont donc deux à deux incompatibles.

- (b) En déduire que, si on pose  $u'_1 = u'_2 = 0$ , le même raisonnement que dans la Partie II, conduit à l'égalité  $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3.

- (c) En déduire l'égalité des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(u'_n)_{n \geq 1}$ .

On peut tenir le même raisonnement qu'en 3a et 3b de la partie précédente ; on obtient une relation de récurrence sur les  $(u'_n)$  identique à celle portant sur les  $(u_n)$ .

Par indépendance des lancers, chaque  $B'_i$  est de probabilité  $\frac{1}{8}$ , donc les incompatibilités et la question 2c permettent de montrer que  $u_i = u'_i$  pour  $i \in [1, 5]$ .

$(u_i)$  et  $(u'_i)$  ont les mêmes premiers termes et obéissent à la même relation de récurrence ; donc sont identiques. Ainsi :  $\forall i \geq 1, u_i = u'_i$ .

- (d) Prouver que les deux variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$  suivent la même loi et vérifient :  $E(Y) = E(Y')$ .

Les suites  $(u_i)$  et  $(u'_i)$  étant égales, les suites  $(v_i)$  et  $(v'_i)$  le sont aussi, et les suites  $(c_i)$  et  $(c'_i)$  le sont aussi.

On en déduit que les lois de  $Y$  et de  $Y'$  sont égales :  $Y$  et  $Y'$  ont donc, notamment, la même espérance.

9. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $G_n$  l'événement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang  $n$  » et  $g_n$  la probabilité de  $G_n$ .

- (a) Calculer  $g_3$  et  $g_4$  et établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante :  $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

$G_3$  a lieu ssi les trois premiers lancers donnent PPF ; d'où  $g_3 = P(G_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ .

$G_4$  a lieu ssi les quatre premiers lancers sont de la forme xPPF. FPPF est exclu car alors J' gagnerait au 3ème tour ; ainsi  $G_4$  a lieu ssi les quatre premiers lancers donnent PPPF.

On a donc  $g_4 = P(G_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ .

De manière assez similaire : si J gagne au rang  $n$ , les  $n$  premiers tirages ont été de la forme  $xx...xPPF$ . Mais s'il existe un Face dans les  $x$ , on voit que le motif FPP apparaîtra avant d'arriver au  $n$ -ième lancer ; donc J' gagne.

Ainsi  $G_n$  a lieu ssi les  $n$  premiers tirages donnent PPP...PPF ; et  $g_n = P(G_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

- (b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.

J gagne ssi un des événements  $G_i$ , avec  $i \geq 3$ , est réalisé. Les  $G_i$  sont deux à deux incompatibles (le joueur gagne à un seul rang donné !), donc

$$P(\text{J gagne}) = P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} G_i\right) = \sum_{i=3}^{+\infty} P(G_i) = \sum_{i=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{4}$$

10. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on désigne par  $d_n$  la probabilité que lors des  $n$  premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

- (a) Préciser  $d_1$  et  $d_2$ .

$d_1 = 1$  (en un lancer, il n'y aura pas 2 Pile consécutifs !). La proba que sur les 2 premiers lancers apparaissent 2 P successifs est la proba que les deux premiers lancers soient PP, donc  $\frac{1}{4}$ . D'où, par

événement contraire,  $d_2 = \frac{3}{4}$ .



- (b) **En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité suivante :**

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

On considère l'événement où PP n'est jamais apparu jusqu'au lancer  $n+2$ .

Alors :

- Si le premier lancer est F, on se ramène à considérer l'événement « PP n'est jamais apparu entre les lancers 2 et  $n+1$  », qui a pour probabilité  $d_{n+1}$  ;
- Si le premier lancer est P, alors le second doit être F (sinon on a PP au rang 2) ; et ensuite on considère les lancers de 3 à  $n+2$ .

Par incompatibilité de ces deux points :

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= P_{\text{face au 1er}}(D_{n+1}) \times P(\text{face au 1er}) + P_{\text{PF aux deux premiers}}(D_n) \times P(\text{PF aux deux premiers}) \\ &= \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n \end{aligned}$$

- (c) **Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on ait :**  $d_n = \alpha \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$ .

Réurrence linéaire d'ordre 2 : on résout l'équation caractéristique, etc. Rien à signaler.

- (d) **En déduire que la série de terme général  $d_n$  converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante :**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$$

Comme  $4 < 5 < 9$  on a  $2 < \sqrt{5} < 3$ , et  $0 < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1+3}{4} < 1$ , donc la série de  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n$  converge.

D'autre part  $-2 < 1 - \sqrt{5} < -1$ , donc  $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ , donc la série de  $\left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$  converge également.

$\sum d_n$  étant somme de deux séries convergentes, on en déduit qu'elle converge également.

On peut alors sommer la relation de récurrence pour  $n = 1 \rightarrow +\infty$ . Soit  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \\ \sum_{n=3}^{+\infty} d_n &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} d_n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \\ S - d_1 - d_2 &= \frac{1}{2}(S - d_1) + \frac{1}{4}S \\ S - 1 - \frac{3}{4} &= \frac{1}{2}(S - 1) + \frac{1}{4}S \end{aligned}$$

après des changements d'indice à la seconde ligne.

La dernière ligne donne une équation sur  $S$ , de laquelle on tire sans difficulté  $S = 5$ .

11. **On désigne par  $T$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.**

- (a) **Justifier, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'égalité :**

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \left( \frac{1}{2} \right)^n + d_n$$

L'événement  $T > n \cup T = 0$  est réalisé ssi personne n'a gagné au bout de  $n$  lancers (donc soit qqn gagne à un temps  $T > n$ , soit personne ne gagne jamais et  $T = 0$ ).

Ceci arrive dans 2 cas incompatibles :

- soit PP n'est jamais sorti (proba  $d_n$ ) ;
- soit PP est déjà sorti ; et alors il n'est jamais précédé de F (sinon J' gagne) ni suivi de F (sinon J gagne). La seule solution possible est le tirage PPP...P (proba  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ).

Par incompatibilité :

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_n$$

(b) **En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité :**

$$P([T = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n$$

Si personne ne gagne avant le rang  $n - 1$ , alors : soit qqn gagne au rang  $n$ , soit personne ne gagne avant le rang  $n$ . Ainsi, par incompatibilité :

$$P([T > n - 1] \cup [T = 0]) = P(T = n) + P([T > n] \cup [T = 0])$$

ce qui donne avec le résultat précédent :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P([T > n - 1] \cup [T = 0]) - P([T > n] \cup [T = 0]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + d_{n-1} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + d_n\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + d_{n-1} - d_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n \end{aligned}$$

(c) **Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.**

On peut calculer la probabilité qu'un joueur gagne ; comme on ne peut pas gagner en moins de 3 coups on a

$$P(1 \text{ joueur gagne}) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(T = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} - d_n$$

(découpage en deux séries convergentes car  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ , et la série de  $tg \ d_{n+1} - d_n$  converge car la suite  $(d_n)$  converge).

On a  $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$  ; et pour  $N \geq 3$ ,  $\sum_{n=3}^N d_{n-1} - d_n = d_2 - d_N = \frac{3}{4} - d_N \rightarrow \frac{3}{4}$  pour  $N \rightarrow +\infty$  car  $(d_n)$  tend vers 0.

Donc  $\sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} - d_n = \frac{3}{4}$ , et la proba qu'un joueur gagne vaut 1.

12. **Calculer la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant et conclure.**

Un joueur gagne avec proba 1 ; J gagne avec proba  $\frac{1}{4}$ . On en conclut que J' gagne avec proba  $\frac{3}{4}$ .  
Ce jeu favorise donc le joueur J'.

13. **Si la configuration gagnante du joueur J avait été « Pile, Pile, Face, Pile, Pile, Face », et la configuration gagnante du joueur J' avait été « Face, Face, Pile, Face, Face, Pile », quelle aurait été la conclusion ?**  
Comme la pièce est équilibrée, les séquences PPFPPF et FFPFPF jouent le même rôle, donc dans ce cas le jeu est équilibré.

(l'argument ne fonctionne pas avec les séquences PPF et FPP : la répétition n'intervient pas en même position).

14. **Soit  $d$  et  $t$  les fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :**

$$\forall x \in [0, 1], d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T = n]) x^n$$

- (a) **Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , l'égalité suivante :**

$$t(x) = (x-1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x$$

C'est assez long. En utilisant  $P([T = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n$  pour  $n \geq 3$ , et  $P(T = 1) = P(T = 2) = 0$ , on écrit :

$$\begin{aligned} t(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} P([T = n]) x^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n + d_{n-1} - d_n \right) x^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n \end{aligned}$$

Tout converge ici car  $x \in [0, 1]$ , donc  $0 \leq \frac{x}{2} < 1$ ,  $0 \leq d_{n-1} x^n \leq d_{n-1}$  et  $0 \leq d_n x^n \leq d_n$  et comparaison de SATP.

$$\begin{aligned} t(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} + x \sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n \\ &= \frac{x^3}{4(2-x)} + x(d(x) - d_1 x) - (d(x) - d_1 x - d_2 x^2) \\ &= \frac{x^3}{4(2-x)} + (x-1)d(x) - d_1 x^2 + d_1 x + d_2 x^2 \end{aligned}$$

Avec les valeurs connues de  $d_1$  et  $d_2$  et un peu de courage on obtient bien l'expression voulue.

- (b) **Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$ , le quotient  $\frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$  en fonction de  $d(x)$ .**

On a  $t(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = 1 - P(T = 0) = 1$  ; on divise ce qui précède par  $x - 1 \neq 0$  ( $x \in [0, 1[$ ).

$$\begin{aligned} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} &= \frac{1}{x - 1} \left( (x-1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x - 1 \right) \\ &= d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1 \end{aligned}$$

- (c) **En s'inspirant de la question 7e de la Partie II, justifier l'égalité suivante :**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$$

Le raisonnement de II5e utilise que les  $v_n$  sont positifs, et que  $\sum v_n$  converge. C'est aussi le cas des  $d_n$  ; on peut donc conclure le résultat similaire.

- (d) **Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance et préciser  $E(T)$ .**

D'où, comme en II5f, la dérivabilité de la fonction  $t$  en 1. D'après la partie I,  $T$  admet donc une espérance, et

$$E(T) = t'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} d(x) + \frac{1^2}{2(2-1)} + 1 = d(1) + \frac{1}{2} + 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n + \frac{3}{2} = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

## Partie IV : simulation informatique

Dans cette partie on simule le jeu sur Python.

On convient de représenter Pile par 1 et Face par 0.

Dans le code de la question 17, la liste  $L$  représentera à tout instant de l'exécution du programme les résultats des trois derniers lancers de pièce. Ainsi si les trois premiers lancers donnent « Pile, Pile, Face » on aura initialement  $L=[1, 1, 0]$  ; si ensuite le quatrième lancer donne Pile,  $L$  sera modifiée en  $L=[1, 0, 1]$ .

15. Écrire la liste  $L1$  représentant la séquence gagnante pour le joueur  $J$  ; et la liste  $L2$  la séquence gagnante pour le joueur  $J'$ .

La séquence gagnante du joueur 1 est PPF, donc  $L1=[1, 1, 0]$  ; et de même  $L2=[0, 1, 1]$ .

16. Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $p$  et  $m$  la commande

```
rd.binomial(n,p,m)
```

renverra-t-elle une liste à 3 composantes, valant chacune 0 ou 1 de manière équiprobable, et mutuellement indépendantes ?

Dans cette commande  $n$  et  $p$  sont les paramètres de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  dont on veut effectuer des tirages ; et  $m$  est le nombre de tirages à renvoyer. Ici on s'intéresse à  $\mathcal{B}(1/2) = \mathcal{B}(1, 1/2)$ , et on veut trois tirages ; il faut donc appeler

```
rd.binomial(1,1/2,3)
```

17. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce jeu, et renvoie 1 si le joueur  $J$  gagne et 2 si le joueur  $J'$  gagne.

```
def PPFvsFPP():
    L1=[1,1,0] # liste gagnante pour J
    L2=[0,1,1] # liste gagnante pour J'
    L=list(rd.binomial(1,1/2,3)) # trois premiers tirages
    while L!=L1 and L!=L2:
        L=L[1:]+[rd.binomial(1,1/2)]
    if L==L1: # la séquence gagnante est celle de J
        return 1
    else:
        return 2
```

NB : on écrit `list(rd.binomial(1,1/2,3))` et pas seulement `rd.binomial(1,1/2,3)` car la comparaison `L1==L2` ne fonctionne pas de la même manière sur les `np.array` : il nous faut ici utiliser des objets de type `list`.

On fait tourner le programme tant que la liste des trois derniers tirages ne fait gagner ni le joueur 1 ni le joueur 2 : donc `while L!=L1 and L!=L2`.

L'actualisation de la liste  $L$  se fait en omettant le terme  $L[0]$  (on considère donc la liste  $L[1:]$ ) à laquelle on ajoute « à droite » un nouveau tirage ; il faut donc considérer la liste dont l'unique élément est ce nouveau tirage (d'où les crochets dans `[rd.binomial(1,1/2)]`) et concaténer à  $L$  avec l'opération `+` sur les listes.

18. La fonction suivante renvoie une liste à deux composantes. Prévoir leur valeur approximative (et justifier votre réponse).

```
def CB():
    C=np.zeros(2)
    for k in range(100000):
        if PPFvsFPP()==1:
            C[0]=C[0]+1
        else:
            C[1]=C[1]+1
    return C/100000
```

La tarte à la crème : la première composante de C compte combien de fois la fonction PPFvsFPP a renvoyé « 1 » sur les 100000 appels ; donc le nombre de fois où le joueur J a gagné sur 100000 parties. De même la seconde composante de C compte le nombre de victoires de J'.

En divisant par 100000 on obtient les fréquences, qui s'approchent par les probabilités de victoire de chaque joueur.

D'après les questions 9b et 12, la liste affichée vaudra environ  $[0.25, 0.75]$ .