

Concours Blanc n°1
Maths 2
Corrigé

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On trouve sur cet intervalle $f'_n(x) = \frac{x-n}{x}$; f_n est donc strictement décroissante sur $]0, n[$ puis strictement croissante sur $]n, +\infty[$.

- (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n , solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

On a les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, et la valeur $f_n(n) = n(1 - \ln(n))$.

Pour $n \geq 3$, $n > e$ donc par stricte croissance du \ln , $\ln(n) > 1$ et $f_n(n) < 0$.

Par théorème de la bijection :

- f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$, donc réalise une bijection de $]0, n[$ sur $]f_n(n), +\infty[$. $0 \in]f_n(n), +\infty[$ donc il existe un unique réel de $]0, n[$, noté u_n , tel que $f_n(u_n) = 0$.
- de même il existe un unique réel de $]n, +\infty[$, noté v_n , tel que $f_n(v_n) = 0$.

On a bien dans ce qui précède $0 < u_n < n < v_n$.

(NB : l'énoncé reste vague sur les unicités donc cette réponse suffit).

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

- (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.

$$f_n(1) = 1 > 0.$$

$$f_n(e) = e - n < 0 \text{ car } n \geq 3.$$

On a donc $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$ donc par stricte décroissance de f_n sur $]0, n[$, $1 < u_n < e$.

- (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}).$$

Mais on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, ce qui fournit $u_{n+1} = (n+1) \ln(u_{n+1})$; et alors

$$f_n(u_{n+1}) = (n+1) \ln(u_{n+1}) - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$$

De $1 < u_{n+1}$ on tire que $\ln(u_{n+1}) > 0$ et donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et encore par stricte décroissance de f_n sur $]0, n[$:

$$u_{n+1} < u_n$$

Ceci valant pour tout $n \geq 3$, on a bien la décroissance de $(u_n)_{n \geq 3}$.

- (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

$(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée par 1 (questions précédentes), donc converge vers une limite $\ell \in [1, e]$.

Pour encadrer $\ln(u_n)$ on repart de $f_n(u_n) = 0$, qui donne $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$.

Avec $1 < u_n < e$ on a en divisant par $n > 0$: $\frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$ et par théorème des gendarmes on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(u_n)} = 1$.

- (d) **Montrer que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; **en déduire que** $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

u_n tend vers 1 ; on fait apparaître une suite de limite nulle en posant $h_n = u_n - 1$. Alors $\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \frac{\ln(1 + h_n)}{h_n}$ et avec $h_n \rightarrow 0$ on a $\ln(1 + h_n) \sim h_n$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + h_n)}{h_n} = 1$$

On déduit de cela que $u_n - 1 \sim \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$; mais avec $u_n \rightarrow 1 \neq 0$ on peut écrire $u_n \sim 1$ et donc

$$\text{finalement } \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Finalement

$$u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.

- (a) **Calculer** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Pour tout $n \geq 3$, on a $v_n > n$ donc par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- (b) **Calculer** $f_n(n \ln(n))$ **puis montrer que** : $\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n$.

$$f_n(n \ln(n)) = n \ln(n) - n \ln(n \ln(n)) = n \ln(n) - n(\ln(n) + \ln(\ln(n))) = -n \ln(\ln(n))$$

Pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3) > 1$ donc $\ln(\ln(n)) > 0$ et donc $f_n(n \ln(n)) < 0$.

$f_n(n \ln(n)) < 0 = f_n(v_n)$ donne $v_n > n \ln(n)$ par stricte croissance de f_n sur $[n, +\infty[$.

- (c) **Soit g la fonction définie par** : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x - 2 \ln(x)$.

Étudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.

On peut remarquer que $g = f_2$!

g admet donc son minimum en $x = 2$; ce minimum vaut $2(1 - \ln(2)) > 0$ donc g est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

On a donc notamment $g(n) > 0$, ce qui donne $n > 2 \ln(n)$.

- (d) **En déduire le signe de** $f_n(2n \ln(n))$, **puis établir que** : $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.

$$\begin{aligned} f_n(2n \ln(n)) &= 2n \ln(n) - n \ln(2n \ln(n)) = 2n \ln(n) - n(\ln(n) + \ln(2 \ln(n))) \\ &= n \ln(n) - n \ln(2 \ln(n)) \\ &= n(\ln(n) - \ln(2 \ln(n))) \end{aligned}$$

Avec $n > 2 \ln(n)$ on déduit que $\ln(n) > \ln(2 \ln(n))$ et donc $f_n(2n \ln(n)) > 0$.

Avec le même argument que précédemment, $v_n < 2n \ln(n)$.

- (e) **Montrer enfin que** : $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

La fonction \ln est strictement croissante. De :

$$n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$$

on tire

$$\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2 \ln(n))$$

puis avec $\ln(n) > 0$:

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2 \ln(n))}{\ln(n)} \quad (*)$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, $\ln(n) \rightarrow +\infty$; de la croissance comparée $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ on tire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$$

et similairement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2\ln(n))}{\ln(n)} = 0$$

L'encadrement (*) et le théorème des gendarmes montrent alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$; ce qui donne bien $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 2

À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \left\{ M(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Recherche d'une base de E .

1. **Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.**

Si on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il est clair que $E = \text{Vect}(A, B, C)$, ce qui montre que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. **Donner une base de E ainsi que sa dimension.**

La famille (A, B, C) introduite ci-dessus est donc génératrice de E ; elle est libre car on voit rapidement que $aA + bB + cC = 0$ (matrice nulle) implique $a = b = c = 0$; c'est donc une base de E . Cette base contient 3 vecteurs, donc $\dim(E) = 3$.

Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$.

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, où on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. **Calculer les matrices J^2, J^3 . En déduire l'expression de J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.**

$$\text{On a donc } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ par calcul direct on trouve } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } J^3 = J^2 \times J = 0.$$

On en conclut : $\forall n \geq 3, J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0$.

4. **Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$:**

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?

On a donc $M(1, 1, 1) = I_3 + J$. I_3 et J commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall n \geq 2, M(1, 1, 1)^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

car pour tout $k \geq 3$, J^k est nulle.

(NB : comme $n \geq 2$ par hypothèse, les termes $k = 0, 1, 2$ sont bien présents dans cette somme !

Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit $M(1, 1, 1)^0 = I_3$: c'est vrai ;

Pour $n = 1$, l'égalité s'écrit $M(1, 1, 1) = I_3 + J$: c'est vrai.

5. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

Avec les valeurs de J et J^2 trouvées ci-dessus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M(1, 1, 1)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est la matrice $M(1, 1, 2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ par :

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (0, 1, 0), \quad w = (2, 1, 1)$$

6. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$.

$$M(1, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ On travaille dans la base canonique ; du produit matriciel}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ 2z \end{pmatrix}$$

on tire : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x + y + z, y + z, 2z)$.

7. Démontrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .

$\text{Card}(\mathcal{C}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 ssi c'est une famille libre.

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0, 0, 0)$; un système 3×3 donne rapidement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d'où la liberté.

\mathcal{C} est bien une base de \mathbb{R}^3 .

8. Exprimer $f(v)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v . En déduire la matrice T de f dans la base \mathcal{C} .

On calcule directement : $f(v) = f((0, 1, 0)) = (1, 1, 0)$; on remarque que $f(v) = u + v$.

On a aussi $f(u) = u$, et $f(w) = 2w$.

Donc

$$T = \text{Mat}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(T a donc le bon goût d'être une matrice triangulaire !).

9. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On procède par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$ il faut montrer $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$: c'est vrai car $T^0 = I_3$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Alors $T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ par un calcul direct et on a bien l'hérédité.

- on a donc montré la propriété voulue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base \mathcal{C} . Vérifier que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P . On note donc $Q = P^{-1}$.

Par la méthode de construction usuelle :

$$P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie par le calcul que $PQ = I_3$, ce qui montre que $Q = P^{-1}$.

11. Donner (en la justifiant) une relation reliant les matrices $M(1, 1, 2)$, P , P^{-1} et T .

On a

- $M(1, 1, 2) = \text{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$;
- $T = \text{Mat}(f, \mathcal{C})$;
- $P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{C}}$.

La formule du changement de base fournit dans ces conditions :

$$T = P^{-1} M(1, 1, 2) P$$

12. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, [M(1, 1, 2)]^n = P T^n P^{-1}$.

On peut procéder par récurrence, ce qui se fait sans difficulté majeure.

On peut aussi remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $M(1, 1, 2)^n = \text{Mat}(f^n, \mathcal{B}_c)$;
- $T^n = \text{Mat}(f^n, \mathcal{C})$;

de sorte que la même formule de changement de base donne cette fois $M(1, 1, 2)^n = P T^n P^{-1}$.

Exercice 3

On admet dans cet exercice la formule suivante : pour tout $x \in]0, 1[$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Soient n et r des entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un jet est $1-x$ et celle d'obtenir Face est x (avec $0 < x < 1$). Les jets sont supposés indépendants.

On pose :

- S_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient Pile au cours des n premiers jets ;
- T_r la variable aléatoire donnant le numéro du jet où on obtient Pile pour la r -ième fois.
- P_n l'événement « obtenir un Pile au n -ième jet de pièce » ,

- F_n l'événement « obtenir un Face au n -ième jet de pièce ».

1. Préciser la loi de S_n . Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

Les jets étant indépendants, on est en présence d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de « succès » (obtenir Pile) égale à $1 - x$; S_n compte le nombre de ces succès.

D'après le cours on a donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - x)$.

Toujours d'après le cours, on obtient $E(S_n) = n(1 - x)$ et $V(S_n) = n(1 - x)(1 - (1 - x)) = nx(1 - x)$.

2. Préciser la loi de T_1 . Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

T_1 est le temps d'attente du 1^{er} Pile ; par indépendance des lancers on a $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - x)$.

On en déduit $E(T_1) = \frac{1}{1 - x}$ et $V(T_1) = \frac{1 - (1 - x)}{(1 - x)^2} = \frac{x}{(1 - x)^2}$.

3. On cherche ici à donner la loi de T_r ainsi que son espérance.

(a) Déterminer $T_r(\Omega)$.

Le r -ème Pile arrive au plus tôt au lancer r ; et peut arriver arbitrairement tard. Ainsi :

$$T_r(\Omega) = \llbracket r, +\infty \rrbracket$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité entre événements :

$$(T_r = k + r) = (S_{k+r-1} = r - 1) \cap P_{k+r}$$

L'événement $(T_r = k + r)$ est réalisé ssi le r -ème Pile arrive au $(k + r)$ -ème lancer ; soit ssi il y a $r - 1$ Pile dans les $(k + r - 1)$ premiers lancers (ce qui est exactement l'événement $(S_{k+r-1} = r - 1)$), et un Pile au $(k + r)$ -ème (ce qui donne l'événement P_{k+r}).

On a donc bien $(T_r = k + r) = (S_{k+r-1} = r - 1) \cap P_{k+r}$.

(c) En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}^*, P(T_r = k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} (1 - x)^r x^k$$

L'événement $(S_{k+r-1} = r - 1)$ concerne les $(k + r - 1)$ premiers lancers ; il est donc indépendant de l'événement P_{k+r} . Ainsi :

$$P(T_r = k + r) = P(S_{k+r-1} = r - 1) \times P(P_{k+r})$$

En utilisant la loi de S_{k+r-1} :

$$P(S_{k+r-1} = r - 1) = \binom{k + r - 1}{r - 1} (1 - x)^{r-1} x^{(k+r-1)-(r-1)} = \binom{k + r - 1}{r - 1} (1 - x)^{r-1} x^k$$

et avec $P(P_{k+r}) = (1 - x)$ on trouve :

$$P(T_r = k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} (1 - x)^r x^k$$

(d) Vérifier que la somme des probabilités des événements $(T_r = k + r)$, où k appartient à \mathbb{N} , est égale à 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_r = k + r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k + r - 1}{r - 1} (1 - x)^r x^k \\ &= (1 - x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k + r - 1}{r - 1} x^k \\ &= (1 - x)^r \frac{1}{(1 - x)^r} \text{ en appliquant la formule admise à l'entier } r - 1 \in \mathbb{N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(e) **Montrer :**

$$(r+k) \binom{r+k-1}{r-1} = r \binom{r+k}{r}$$

En déduire $E(T_r)$.

En utilisant la formule définissant les coefficients binomiaux :

$$(r+k) \binom{r+k-1}{r-1} = (r+k) \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!} = \frac{(r+k)!}{(r-1)!k!}$$

et

$$r \binom{r+k}{r} = r \frac{(r+k)!}{r!k!} = \frac{(r+k)!}{(r-1)!k!}$$

ce qui donne bien l'égalité recherchée.

Alors $E(T_r)$ est donnée, sous réserve de convergence absolue, par la somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) P(T_r = k+r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) \binom{k+r-1}{r-1} (1-x)^{r-1} x^k \times (1-x) \\ &= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} r \binom{r+k}{r} x^k \quad \text{d'après la formule précédente} \\ &= r(1-x)^r \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \quad \text{d'après la formule admise par l'énoncé} \\ &= \frac{r}{1-x} \end{aligned}$$

On a bien la convergence absolue car c'est une SATP, qui converge en vertu de la formule admise par l'énoncé.

4. **On se propose ici de retrouver $E(T_r)$ par un autre moyen. On note :**

- $U_1 = T_1$;
- **Pour tout** $i \in [2, r]$, $U_i = T_i - T_{i-1}$.

(a) **Exprimer T_r en fonction des U_i .**

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $T_r = (T_r - T_{r-1}) + (T_{r-1} - T_{r-2}) + \dots + (T_2 - T_1) + T_1 = U_r + \dots + U_1$.

(b) **Quelles loi suivent les U_i ? (on donnera des éléments de justification). Retrouver $E(T_r)$.**

Pour $i \geq 2$, U_i est le temps d'attente d'un nouveau succès (temps entre le $(i-1)$ -ème et le i -ème, donc suit $\mathcal{G}(1-x)$. De même pour $U_1 = T_1$ (déjà montré).

On en déduit, par linéarité de l'espérance,

$$E(T_r) = E\left(\sum_{i=1}^r U_i\right) = \sum_{i=1}^r E(U_i) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{1-x} = \frac{r}{1-x}$$

5. **Programmer une fonction Python $T(r, x)$ qui renvoie un tirage de T_r définie comme dans ce problème, pour des valeurs de $x \in]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$ passées en argument.**

On peut proposer :

```
def T(r, x):
    lancers = 0 # compte les lancers
    piles = 0 # compte les Pile
    while piles < r :
        if rd.random() < 1-x: # le lancer donne Pile
            piles = piles+1
        lancers = lancers+1
    return lancers
```

On examine maintenant un jeu d'argent utilisant ces tirages.

Soient des réels $a > 0$ et $\lambda > 1$. Un joueur parie de la façon suivante : lors du $n^{\text{ième}}$ jet, il mise la somme a^{n-1} (en euros) et jette la pièce.

- Si Pile sort, il perd sa mise et gagne la somme λa^{n-1} .
- Si Face sort, il perd sa mise.

On note G_n la variable aléatoire égale au gain net du joueur (c'est-à-dire les gains moins les pertes) après son $n^{\text{ième}}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

6. On suppose dans cette question que $a = 1$.

(a) Montrer que $G_1 = -T_1 + \lambda$, et calculer l'espérance de G_1 .

On suppose que $T_1 = n$. Le premier Pile arrive au n -ème jet, ce qui signifie que le joueur a perdu sa mise de 1 euro lors des n premiers lancers (donc gain net = $-n$) et a gagné λ au n -ième lancer.

Au total le gain net est donc $G_1 = \lambda - n$.

On a bien montré que $G_1 = \lambda - T_1$.

Par linéarité de l'espérance on obtient donc $E(G_1) = \lambda - E(T_1) = \lambda - \frac{1}{1-x}$.

(b) Plus généralement, exprimer G_r en fonction de λ , r et T_r . En déduire $E(G_r)$.

Au r -ème succès, la situation est la suivante :

- Le joueur a perdu T_r fois sa mise de 1 euro (à chaque lancer) ;
- Et il a gagné r fois λ euros aux r apparitions de Pile.

On a donc $G_r = -T_r + r\lambda$. On en déduit par linéarité de l'espérance et avec la partie précédente :

$$E(G_r) = r\lambda - \frac{r}{1-x} = r \left(\lambda - \frac{1}{1-x} \right)$$

7. On suppose maintenant que $a > 1$.

(a) En examinant les gains et pertes lors des T_1 premiers lancers, montrer que $G_1 = -\frac{1-a^{T_1}}{1-a} + \lambda a^{T_1-1}$.

Sur les T_1 premiers lancers, le candidat perd toujours sa mise :

- au premier lancer, il perd $a^0 = 1$
- au second, il perd $a^1 = a$
- ...
- au lancer T_1 , il perd a^{T_1-1}

Enfin au lancer T_1 il remporte λa^{T_1-1} .

Le gain net est donc

$$G_1 = -1 - a - \dots - a^{T_1-1} + \lambda a^{T_1-1} = -\sum_{k=0}^{T_1-1} a^k + \lambda a^{T_1-1} = -\frac{1-a^{T_1}}{1-a} + \lambda a^{T_1-1}$$

(b) Étudier l'existence des espérances des variables aléatoires a^{T_1} et G_1 . Lorsque ces espérances existent, les calculer.

L'espérance de la variable a^{T_1} existe, par théorème du transfert, ssi la série $\sum a^k P(T_1 = k)$ est absolument convergente.

Cette série s'écrit encore, en utilisant $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x)$:

$$\sum_{k \geq 1} a^k x^{k-1} (1-x) = \frac{1-x}{x} \sum_{k \geq 1} (ax)^k$$

donc converge absolument ssi $|ax| < 1$ (et diverge grossièrement sinon).

a^{T_1} admet donc une espérance ssi $a < \frac{1}{x}$.

Dans ce cas on obtient :

$$E(a^{T_1}) = \frac{1-x}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} (ax)^k = \frac{1-x}{x} \frac{ax}{1-ax} = \frac{a(1-x)}{1-ax}$$

En remarquant que $G_1 = \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) a^{T_1} - \frac{1}{1-a}$, et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(G_1) &= E\left(\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) a^{T_1} - \frac{1}{1-a}\right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) E(a^{T_1}) - \frac{1}{1-a} \\ E(G_1) &= \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) \frac{a(1-x)}{1-ax} - \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

8. (a) **Exprimer G_2 en fonction de T_1 et T_2 .**

De manière similaire, au cours des T_2 lancers de l'expérience, le joueur a perdu $\sum_{k=1}^{T_2} a^{k-1} = \frac{1-a^{T_2}}{1-a}$;
et il a gagné aux lancers T_1 et T_2 les montants (respectivement) λa^{T_1-1} et λa^{T_2-1} .

Donc

$$G_2 = \lambda a^{T_1-1} + \lambda a^{T_2-1} - \frac{1-a^{T_2}}{1-a}$$

(b) **Montrer que, sous les mêmes conditions qu'en 7b, $E(a^{T_2})$ existe. Calculer cette espérance et en déduire $E(G_2)$.**

Pour examiner l'existence de a^{T_2} on forme la série $\sum a^k P(T_2 = k)$.

D'après la question 3c (avec $r = 2$) :

$$\forall k \geq 0, P(T_2 = k+2) = (k+1)(1-x)^2 x^k$$

ou encore :

$$\forall n \geq 2, P(T_2 = n) = (n-1)(1-x)^2 x^{n-2}$$

La série à étudier est donc

$$\sum_{n \geq 2} a^n (n-1)(1-x)^2 x^{n-2} = (1-x)^2 a^2 \sum_{n \geq 2} (n-1)(ax)^{n-2}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée, qui cv (absolument) ssi $|ax| < 1$: ce sont bien les conditions de la question précédente.

Dans le cas convergent, on peut sommer :

$$\begin{aligned} E(a^{T_2}) &= (1-x)^2 a^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(ax)^{n-2} \\ E(a^{T_2}) &= (1-x)^2 a^2 \frac{1}{(1-ax)^2} \end{aligned}$$

De

$$G_2 = \lambda a^{T_1-1} + \lambda a^{T_2-1} - \frac{1-a^{T_2}}{1-a} = \frac{\lambda}{a} a^{T_1} + \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) a^{T_2} - \frac{1}{1-a}$$

on tire, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(G_2) &= \frac{\lambda}{a} E(a^{T_1}) + \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) E(a^{T_2}) - \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{\lambda}{a} \frac{a(1-x)}{1-ax} + \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a}\right) \frac{(1-x)^2 a^2}{(1-ax)^2} - \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$