

Concours Blanc n°2, Maths 1
06/03/2023
Durée : 4h

Exercice 1

Soit V une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi suivie par V . Donner sans calcul les valeurs de $E(V)$ et de la variance de V .

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont on note la fonction de répartition F_W . On dit que W suit la *loi de Gumbel*.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.
(b) En déduire que W est une variable à densité, et en donner une densité qu'on notera f_W .

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V .

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω , on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

3. (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_{Y_n} .
(c) Montrer que F_{Y_n} est \mathcal{C}^1 en 0 et que $F'_{Y_n}(0) = 0$.
4. (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$ est convergente.
(b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

- (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.
(d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

5. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du$$

- (b) En déduire que $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ puis donner $E(Y_n)$ sous forme de somme.
6. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$; on note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n .
(a) Justifier que, pour tout réel x , on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

(b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

(c) Montrer que, pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}$.

(d) Montrer que la suite de variables (Z_n) converge en loi vers une variable suivant la loi de Gumbel.

7. On réalise les imports suivants en Python :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

En Python, la commande `rd.exponential(a,n)` renvoie un `np.array` à n composantes qui sont des tirages indépendants d'une variable suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{a}\right)$ (et non pas $\mathcal{E}(a)$, attention !!)

(a) En utilisant `rd.exponential`, écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageW(k)` qui renvoie un `np.array` de k tirages indépendants de W . En déduire un moyen d'afficher une valeur approchée de $E(W)$ (dont on admet l'existence).

(b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def tirageZn(n)` qui renvoie un tirage de Z_n .

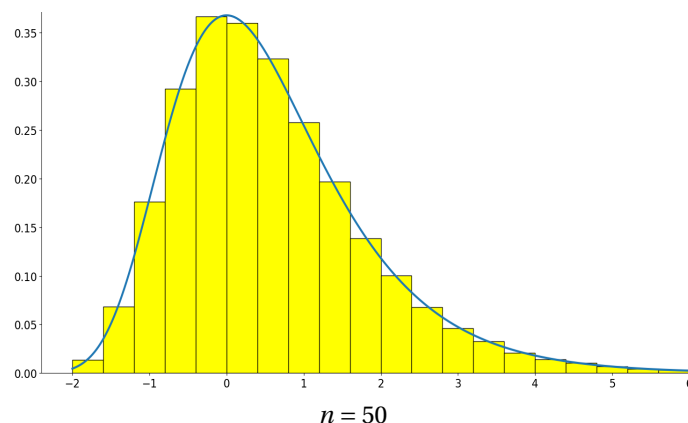
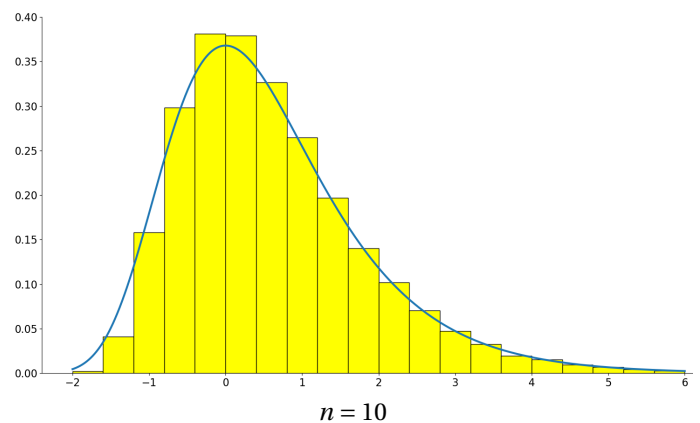
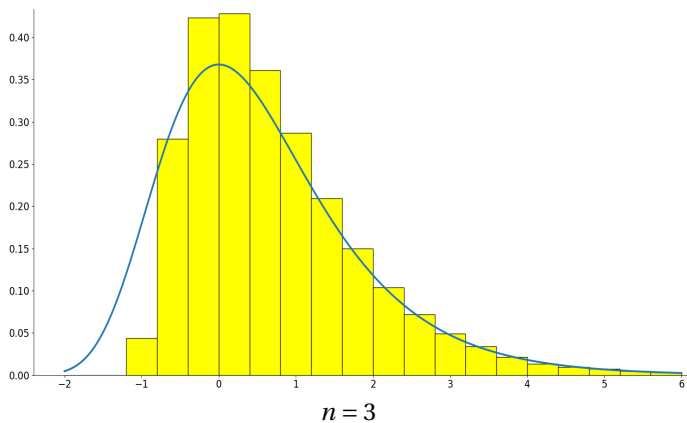
(c) On considère le code suivant :

```
X=np.linspace(-2,6,1000)
def Gumbel(x):
    return ....

plt.plot(X,Gumbel(X),linewidth=3) # linewidth : épaisseur du trait

n = ...
L=[tirageZn(n) for k in range(100000)]
plt.hist(L,20,density=True)
plt.show()
```

En l'exécutant successivement avec $n=3$, $n=10$ et $n=50$ on obtient les 3 figures suivantes :



Comment interpréter cela ? Quelle est l'expression de la fonction `Gumbel(x)` ?

Exercice 2

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x e^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
(b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n .
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel x non nul, calculer $f'_n(x)$ puis étudier son signe.
(b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^- , puis donner le tableau de variations de f_n .
(c) Donner l'allure de la courbe \mathcal{C}_1 .
3. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
(b) Vérifier que, pour tout n de \mathbb{N}^* , u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$.
(c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
(d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$.
Indication : on pourra s'intéresser à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$.
En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
4. (a) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
5. On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$.
(a) Montrer que : $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.
(b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
(c) Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 3

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n »,
- B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n »
- C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$, le n -ème état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0 ainsi que p_1, q_1, r_1 .
(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire une valeur propre de A, et une base du sous-espace propre associé.
(c) Déterminer le rang de $A - I_3$. En déduire un autre sous-espace propre de A, et une base du sous-espace propre associé.
(d) Montrer que A n'admet pas de valeur propre autre que celles déterminées dans les deux questions précédentes.
(e) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
On justifiera l'inversibilité de P.
Calculer P^{-1} .
(f) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = PD^n P^{-1}$.
4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrer que : $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.

(b) Démontrer que $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n .

6. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \bar{A}_n \text{ est réalisé} \end{cases}$$

- (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
Quelle est la signification de l'espérance $E(S_n)$?
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n .
(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passages en A entre l'étape 1 et l'étape n.

8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.

Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

- (a) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n .

- (c) Démontrer que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$.
 En déduire que $P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^n \overline{B_k}$ et on admettra que :

$$P_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}.$$

- (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(T_B = k)$.
 En déduire la probabilité $P(T_B = 0)$.
 (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?