

### Exercice 1

1.  $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$  of course.

d'où  $E(V) = 1$  et  $V(V) = 1$  (variance)

$$\begin{aligned} 2a. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) &= P(W \leq x) \\ &= P(-\ln(V) \leq x) \end{aligned}$$

$$= P(\ln(V) \geq -x)$$

$$= P(V \geq e^{-x})$$

↙ stricte ↑ de exp.

$$= 1 - F_V(\underbrace{e^{-x}}_{\geq 0}) \quad \text{par définit° de } F_V \text{ (} V \text{ à densité)}$$

$$= 1 - (1 - e^{-e^{-x}}) \quad \text{avec l'expression de } F_V \text{ pour } x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

2b.  $F_W$  ci-dessus est clairement  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  comme composée de  $\text{Id}^\circ$   $\mathcal{C}^1$ .

$$\Rightarrow \boxed{W \text{ est à densité}} /$$

Une densité s'obtient en dérivant  $F_W$  sur  $\mathbb{R}$  (pas de souci de pts de transit° ici!)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = F_W'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}}$$

3a. loi du max!

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i$$

$$= (F_V(x))^n \quad \text{car ts les } X_i \text{ suivent la m\u00eame loi que } V$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = (F_V(x))^n}$$

, et en remplaçant  $F_V$  par son expression on obtient l'expression demandée.

3b.

$$F_{Y_n} = F_V^n ; V \text{ est \u00e0 densit\u00e9 donc } F_V \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}, \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

donc  $F_{Y_n}$  est aussi  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et  $\boxed{Y_n \text{ est \u00e0 densit\u00e9}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f_{Y_n}(x) = F_{Y_n}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

!

$$\text{et on pose } f_{Y_n}(0) = 0$$

$$\cancel{3c. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_{Y_n}(x) - F_{Y_n}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \dots}$$

3c : cf apr\u00e8s 6b

4a. Pour  $t \rightarrow +\infty$ ,  $1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^n$  (on prend l'expression pour  $t > 0$  !)

$e^{-t} \rightarrow 0$  donc on peut utiliser le DL de  $(1+x)^\alpha$  au voisinage de 0

$$\begin{aligned} 1 - F_{Y_n}(t) &= 1 - (1 - ne^{-t} + o(e^{-t})) \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} ne^{-t} + o(e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-t}}$$

$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  est impropre en  $+\infty$ ...

\*  $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $\underline{[0, +\infty[}$

\*  $1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{-t}$ , et  $\int_0^{+\infty} ne^{-t} dt < +\infty$  (intégrale usuelle).

Pour comparaison de  $\int_0^{+\infty} \geq 0$ ,  $\boxed{\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt < +\infty}$

4b. IPP, assez clairement...

sur le segment  $[0, x]$ :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^x 1 \times (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

on pose  $u(t) = 1 - F_{Y_n}(t) \Rightarrow u'(t) = -f_{Y_n}(t)$  (d'après 3c, cela vaut aussi en  $t=0$ !)

$v(t) = 1 \Rightarrow v'(t) = 0$

$u, u', v, v'$  sont  $\mathcal{C}^0$  donc l'IPP est licite :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \left[ t(1 - F_{Y_n}(t)) \right]_0^x - \int_0^x t(-f_{Y_n}(t)) dt$$

$$\boxed{\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt}$$

(3c) (NB: rajouter à l'IPP en 0 n'étant pas faisable sinon!)

On calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_{Y_n}(x) - F_{Y_n}(0)}{x}$

\* si  $x > 0$ ,  $\frac{F_{Y_n}(x) - F_{Y_n}(0)}{x} = \frac{(1 - e^{-x})^n}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^n}{x} = x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$   
car  $\underline{\underline{n \geq 2}}$ .

\* si  $x < 0$ ,  $\frac{F_{Y_n}(x) - F_{Y_n}(0)}{x} = \underline{\underline{0}}$

donc  $\boxed{F_{Y_n} \text{ est dérivable en } 0, \text{ et } F_{Y_n}'(0) = 0}$

Enfin:  $\forall x < 0, F_{Y_n}'(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$

$\forall x > 0, F_{Y_n}'(x) = n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

$\Rightarrow F_{Y_n}' \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ en } 0$   
et donc  
 $F_{Y_n} \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0.$

Ainsi, en posant  $f_{Y_n}(0) = 0$  en 3b, on a en fait bien  $f_{Y_n} = F_{Y_n}'$   
sur  $[0, +\infty[$  (3)

ce qui permet de faire proprement l'IPP.

4c.  $x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} n x e^{-x}$  avec l'équivalent de 4a.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} n x e^{-x} = 0$  par croiss. comp.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$

4d.  $Y_n$  possède une espérancessi  $\int_{-\infty}^{+\infty} t \overbrace{f_{Y_n}(t)}^{=0 \text{ sur } \mathbb{R}_-} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{t f_{Y_n}(t)}_{\geq 0} dt$  cv absol.

(mais la cv absolue est donc ici la cv "simple")

$$\text{D'après 4b: } \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt = \underbrace{\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt}_{\substack{\rightarrow \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt \\ (4a)}} - \underbrace{x(1 - F_{Y_n}(x))}_{\substack{\rightarrow 0 \\ (4c)}}$$

donc par  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt}$$

ce qui donne bien l'existence et la valeur de  $E(Y_n)$

5a.  $u = 1 - e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = 1 - u$   
 $\Leftrightarrow t = -\ln(1-u)$  et donc  $dt = -\frac{-1}{1-u} du = \frac{1}{1-u} du$

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^x (1 - (1 - e^{-t})^n) dt$$

$$\xrightarrow{u = 1 - e^{-t}} = \int_0^{1 - e^{-x}} (1 - u^n) \frac{1}{1-u} du$$

$$\left\{ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1 - e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1-u} du \right\}$$

5b. On reconnaît une somme géométrique

$$\forall u \neq 1, \frac{1 - u^n}{1 - u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k; \quad \text{or } x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} \in [0, 1[$$

$\Rightarrow u \neq 1$  sur l'intervalle d'intégrat°  $[0, 1 - e^{-x})$ .

En remplaçant:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1 - e^{-x}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) du$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_0^{1 - e^{-x}} u^k du \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^{1 - e^{-x}}$$

"en faisant"  
 $k = k+1$

$$\Rightarrow \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1 - e^{-x})^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$$

D'après hd,

(4)

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^n (1 - F_{Y_n}(t)) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-n})^k}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - e^{-n})^k}{k} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

(6) a  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= P(Z_n \leq x) \\ &= P(Y_n - \ln(n) \leq x) \\ &= P(Y_n \leq x + \ln(n)) \\ &= F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{aligned}$$

$$\stackrel{3a}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x + \ln(n) < 0 \\ (1 - e^{-(x + \ln(n))})^n & \text{si } x + \ln(n) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ (1 - e^{-x} \times e^{-\ln(n)})^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \end{cases}$$

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \end{cases}}$$

6c. Classique!

Ici,  $x$  est fixé et  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\underbrace{n \ln \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)}_{\rightarrow 0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left( -\frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x} \neq 0$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}}$$

$$6d. F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n). \end{cases}$$

À  $x$  fixé:  $-\ln(n) \rightarrow -\infty$  donc à partir d'un certain rang on aura

$$x \geq -\ln(n) ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n$$

expression valable  
pour  $n$  grand!

$$\text{et avec } \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n = \exp \left( \underbrace{n \ln \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)}_{\rightarrow -e^{-x}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}}}$$

On constate que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$

:  $(Z_n)$  converge en loi vers  
une variable suivant la  
loi de W



7a.

(5)

D'après l'incrément on obtient  $W$  comme  $-\ln(V)$  où  $V$  suit  $\mathcal{E}(1)$

On tire donc  $n$  valeurs de  $V$ , et on prend  $-\log()$  de l'array obtenu :

```
def tirageW(k):
```

```
    V = rd.exponential(1)
```

```
    W = - np.log(V)    # calcul des logarithmes terme à terme
```

```
    return W
```

L'espérance s'approxime par la valeur moyenne d'un grand nombre de tirages :

On peut par exemple afficher la moyenne de 10000 tirages par :

```
np.mean(tirageW(10000))
```

7b.  $Z_n = Y_n - \ln(n)$ , où  $Y_n$  est le max de  $n$  variables exponentielles

```
def tirageZn(n):
```

```
    Yn = max(rd.exponential(1, n))
```

```
    Zn = Yn - np.log(n)
```

```
    return Zn
```

7c. Ce code effectue les opérat° suivantes :

- \* trace de la courbe de la fonction "Gumbel" sur  $[-2,6]$

- \* pour une valeur de  $n$  à compléter,  $L$  contient 100000 tirages de  $Z_n$  ; on représente alors cette série par un histogramme (bien normalisé grâce à "density = True") en découpant en 20 classes de largeur égale

L'histogramme fournit alors la "répartition" des valeurs de  $Z_n$  obtenus : ce profil s'identifie à la densité de  $Z_n$ .

Pour  $n$  grand, avec  $Z_n \xrightarrow{L} W$  où  $W$  suit Gumbel, ce profil s'identifie aussi à la densité de  $W$ .

- \* le fait que l'histogramme "s'aligne" sur la densité de  $W$  traduit donc la convergence en loi ; et la fct° tracée est donc la densité de  $W$  :

```
def Gumbel(x):
```

```
    return np.exp(-x) * exp(-np.exp(-x))
```

## Exercice 2

(6)

$$f_n(x) = x e^{-n/x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ = 0 \quad \text{si } x = 0$$

1a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{-n/x}}_{\rightarrow 0} \stackrel{=0}{=} 0$  car  $-\frac{n}{x} \rightarrow -\infty$  pour  $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0) \quad \text{donc } \boxed{f_n \text{ est } C^0 \text{ à droite en } 0}$$

1b.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{-n/x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-n/x} = \underline{\underline{0}}$

donc  $\boxed{f_n \text{ est dérivable à droite en } 0, \text{ et sa valeur dérivée à droite est } 0}$

2a. Sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,  $-\frac{n}{x}$  est bien défini donc

$f_n: x \mapsto x e^{-n/x}$  est bien  $\mathcal{C}^1$  (donc dérivable) car composée de  $\text{id} \in \mathcal{C}^1$

$$\forall x \neq 0: f'_n(x) = \frac{n}{x^2} x e^{-n/x} + e^{-n/x} = \underline{\underline{\left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-n/x}}}$$

(l'exponentielle étant toujours  $> 0$  :

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{n}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+n}{x} \geq 0.$$

On forme le tableau de signes:

$x$	$-\infty$	$-\frac{n}{2}$	$0$	$+\infty$
$x+n$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$x$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f'_n(x)$	$+$	$-$	$  $	$+$
$f_n(x)$	$-\infty$	$-ne$	$  $	$+\infty$

En  $\pm\infty$ ,  $-\frac{n}{x} \rightarrow 0$  donc  $e^{-\frac{n}{x}} \rightarrow 1$

donc  $f_n(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

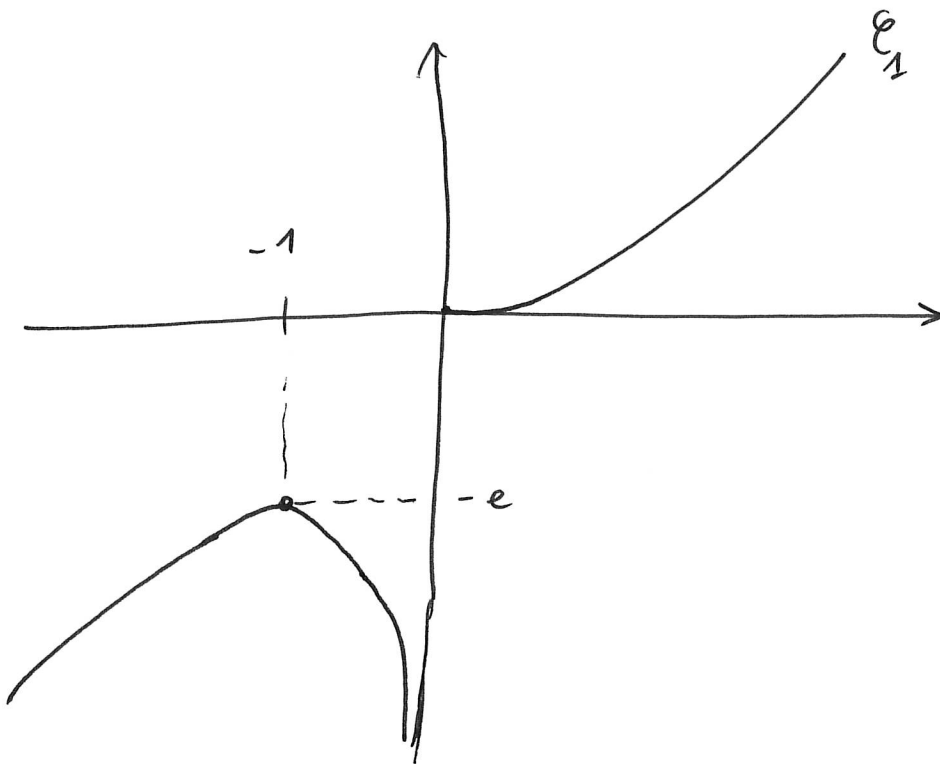
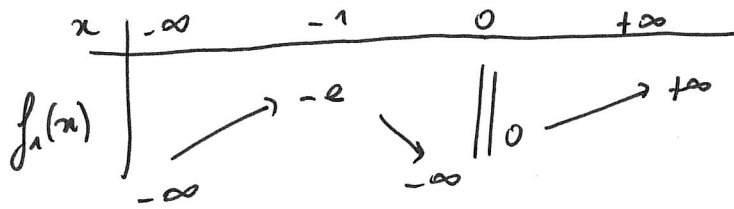
En  $0^-$ :  $-\frac{n}{x} \rightarrow +\infty$  donc  $e^{-\frac{n}{x}} \rightarrow +\infty$ :  $x e^{-\frac{n}{x}}$  est une FI

on peut poser  $y = -\frac{1}{x}$ :  $x \rightarrow 0^-$  donne  $y \rightarrow +\infty$

et  $f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}} = -\frac{1}{y} e^{ny} = -\frac{e^{ny}}{y} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} -\infty$  par crass. comp.

↑  
celle-ci n'était pas facile!

2c. On trace quelque chose de raisonnable au vu du tableau de vari<sup>o</sup>, de la  $1/2$  tangente horizontale à droite en 0 (q. 1b)



3a.  $f_n$  est  $< 0$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  (cf tableau de 2b) donc on se limite à chercher sur  $\mathbb{R}_+$ .

Sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f_n' > 0$  sauf en un point; donc  $f_n$  est  $\varphi^o$ , str  $\uparrow$  de  $\mathbb{R}_+$  de  $\mathbb{R}_+$  donc réalise 1 bijet<sup>o</sup> de  $\mathbb{R}_+$  dans lui-même.

$1 \in \mathbb{R}_+$ , donc  $\exists! u_n \in \mathbb{R}_+$  tq  $f_n(u_n) = 1$

(et donc  $\exists! \underline{u_n} \in \mathbb{R}$  ———, d'après notre préliminaire)

$$3b. f_n(1) = e^{-n} < 1 = f_n(u_n)$$

donc par stricte  $\uparrow$  de  $f_n$  :  $1 < u_n$

$$\text{De plus } f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{-n/u_n} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-n/u_n} = 1/u_n$$

$$\Leftrightarrow -\frac{n}{u_n} = -\ln(u_n)$$

$$\Leftrightarrow u_n \ln(u_n) = n$$

$$\text{donc } \boxed{u_n \text{ est solut}^\circ \text{ de l'equat}^\circ x \ln(x) = n}$$

$$3c. g(x) = x \ln(x). \quad g \text{ définie et dérivable sur } [1, +\infty[$$

$$\forall x \geq 1, g'(x) = 1 + \ln(x) \geq 1 \quad \text{sur } [1, +\infty[$$

donc  $> 0$

$g$  est donc  $C^0$ , str  $\uparrow$  sur  $[1, +\infty[$

$x$	1	$u_n$	$+\infty$
$g(x)$	0	$\vdots$ $\nearrow$ $n$	$+\infty$

$g$  est bijective de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$ .

Le tableau de variat<sup>o</sup> de  $g^{-1}$  s'en déduit :

$x$	0	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$

$$\text{On a } g(u_n) = n \Leftrightarrow \underline{u_n = g^{-1}(n)}$$

$$\text{et } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = \underline{\underline{+\infty}}}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty.$$

3d. On a vu que  $u_n \ln(u_n) = n$

(8)

$$\text{donc } \ln(u_n \ln(u_n)) = \ln(n)$$

$$\Rightarrow \underline{\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)}$$

On force le quotient  $\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$  pour faire apparaître la quantité suggérée :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}$$

(NB:  $u_n > 1$  donc on peut diviser par  $\ln(u_n)$ )

Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n \rightarrow +\infty$  donc  $\ln(u_n) \rightarrow +\infty$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\text{et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1 \Rightarrow \boxed{\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

⚠ ⚠ ON N'EN DEDUIT PAS QUE

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \quad \begin{matrix} ||| \\ 210 \end{matrix}$$

et à la place on réinjecte ds :  $u_n \ln(u_n) = n$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{n}{\ln(n)}}$$

$$4a. f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}$$

et comme on a :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad u_{n+1} e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}} = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}}_{f_n(u_{n+1})} e^{-\frac{1}{u_{n+1}}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{u_{n+1}} > 0, \quad \text{on a } f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}} > 1 = f_n(u_n)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ str. } \nearrow}$$

$$5. I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$$

Pour encadrer  $I_n$ , on encadre  $f_n(t)$  sur  $[u_n, u_{n+1}]$ .

La stricte  $\nearrow$  de  $f_n$  donne :

$$\forall t \in [u_n, u_{n+1}], \quad f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1})$$

$$1 \leq f_n(t) \leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$



Donc en intégrant (bornes de l'ordre 1 !)

(9)

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1 \cdot dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{1/u_{n+1}} dt$$

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq e^{1/u_{n+1}} (u_{n+1} - u_n)$$

$$\boxed{1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{1/u_{n+1}}}$$

en divisant par  $u_{n+1} - u_n > 0$

5b. Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n \rightarrow +\infty$  (3c)

$$\text{donc } e^{1/u_{n+1}} \rightarrow 1$$

$$\text{et par encadrement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1}$$

5c. Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum I_n$  et  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  ont la même nature.

On  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  cv ssi  $(u_n)$  cv vers  $l \in \mathbb{R}$ .

Ici,  $u_n \rightarrow +\infty$ , donc  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  dv

$$\text{donc } \boxed{\sum I_n \text{ diverge}}$$

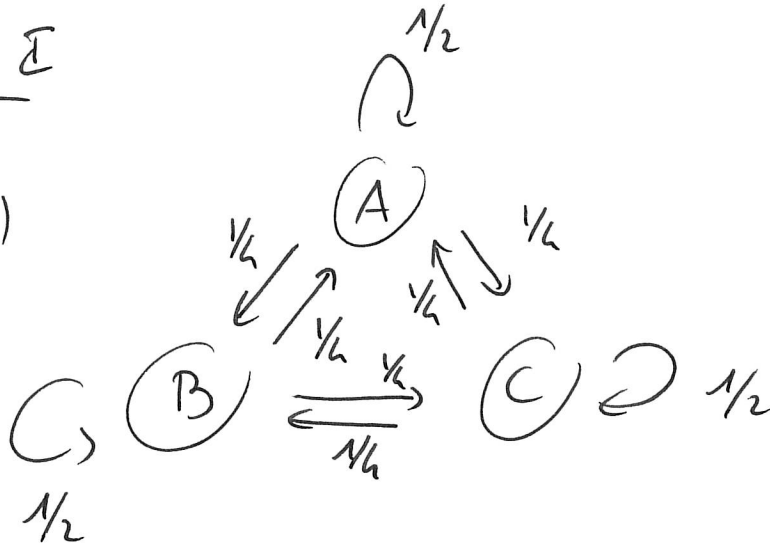


# Exercice 3

10

## Partie I

1)



Avec les notat° indiquées, l'état (1) est (A) (2) (B) (3) (C) { (mais de la façon les sommets sont interchangeables!)

$$\text{d'où } M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(la 1<sup>o</sup> ligne de M est par exemple constituée de :

- \* la proba de rester en A sachant qu'on y est:  $\frac{1}{2}$
- \* la proba d'aller en B \_\_\_\_\_ est en A:  $\frac{1}{4}$
- \* \_\_\_\_\_ C \_\_\_\_\_ :  $\frac{1}{4}$ .

En. On est en A au  $t_0$  donc  $A_0$  est certain, et  $B_0, C_0$  sont impossibles

$$\Rightarrow \boxed{p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = 0}$$

Avec la FPT sur le SCE  $(A_0, B_0, C_0)$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \pi & \text{vids} & \end{matrix}$

$$P(A_1) = P_{A_0}(A_1) \times P(A_0) + \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{termes nuls}}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2} = p_1$$

$$q_1 = P(B_1) = P_{A_0}(B_1) = 1/4$$

$$\pi_1 = 1/4 \text{ de même}$$

2b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(A_n, B_n, C_n)$  sv 1 syst complet d'év<sup>ts</sup>.

$$\Rightarrow P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \cdot P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \cdot P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \cdot P(C_n)$$

$$P_{n+1} = \underbrace{m_{1,1} p_n + m_{2,1} q_n + m_{3,1} \pi_n}_{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{ère}} \text{ composante de } V_n \cdot \Pi}}$$

et de  $\hat{m}$  avec les 2 autres composantes : donc  $V_{n+1} = V_n \Pi$ .

2c. Récurrence évidente (mais à rédiger! et ne pas parler de suite géométrique !!)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3a.  $A$  est symétrique donc diagonalisable

$$3b. A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est 1 rep. de } A \text{ pour la rep. } 4$$

$$\Rightarrow \underline{4 \in \text{Sp}(A)}.$$

On ne peut pas conclure ici que  $E_4(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  sans résoudre le système !

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y = z.$$

$$\text{donc } \boxed{E_4(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \quad (\text{un vecteur générateur non nul donc c'est une base du sep})$$

$$3c. A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de } \underline{\underline{\text{rg } 1}} \quad (3 \text{ colonnes identiques, non nulles})$$

$$\text{donc } \underline{1 \in \text{Sp}(A)}.$$

~~On~~ On résout :  $AX = X \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$

$$\text{donc } \boxed{E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)} \quad (2 \text{ vecteurs gén. non colinéaires} \rightarrow \text{base})$$

3d. On a vu que  $\dim E_1(A) = 1$   
 $\dim E_2(A) = 2$

$\Rightarrow \dim E_1(A) + \dim E_2(A) = \underline{3}$  et  $A \in \underline{M_3(\mathbb{R})}$  donc il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre.

$$\text{Sp}(A) = \{1, 1\}$$

3e. On obtient  $P$  en concaténant des bases de SEP  
 $\uparrow$  justifie d'inversibilité.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient par exemple  $P^{-1}$  en résolvant le système

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a+b+c) \\ y = \frac{1}{3}(2a-b-c) \\ z = \frac{1}{3}(-a+2b-c) \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3f Réécriture faite 1000 fois (mais à refaire)

h) Les états stables sont des vecteurs propres de  $T_{\Pi} = \Pi$ , associés à la valeur 1

(12)

$$M = \frac{1}{4} A \quad ; \quad \text{Sp}(A) = \{1, 4\} \quad \text{donc} \quad \text{Sp}(M) = \{\frac{1}{4}, 1\}$$

$$\text{et} \quad E_1(A) = E_{1/4}(M)$$

$$E_4(A) = E_1(\Pi) \rightarrow E_1(\Pi) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Un état stable s'écrit donc  $(a \ a \ a)$  avec  $\begin{cases} a \geq 0 \\ a+a+a=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \right) \text{ est l'unique état stable de cette chaîne}$$

$$\text{Soit } M = \frac{1}{4} A \quad \text{donc} \quad M^n = \frac{1}{4^n} A^n = \frac{1}{4^n} P D^n P^{-1}$$

$$= \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n & 1 & 0 \\ 4^n & 0 & 1 \\ 4^n & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^{n+2} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n+2} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n+2} \end{pmatrix}$$

So. Avec  $(p_n \ q_n \ r_n) = (p_0 \ q_0 \ r_0) M^n$  (d'après 2c)

$$= (1 \ 0 \ 0) \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^{n+2} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{On trouve } (p_n \quad q_n \quad r_n) = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3 \times 4^n} & \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} & \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n}\right) & \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) & \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{pmatrix}}}$$

6 Clairement  $p_n, q_n, r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$  : la loi de la chaîne de Markov converge vers l'état stable

### Partie III

7a.  $X_1 + \dots + X_n$  vaut le nombre de  $X_i$  égaux à 1 ; donc le nombre d'év<sup>ts</sup>  $A_i$  réalisés ; donc le nombre d'instants,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  où le mobile est en A.

$\Rightarrow$  On compte le nombre de passages en A au cours des  $n$  premiers instants du parcours

... et  $E(S_n)$  le nombre moyen de ces passages

7b.  $X_n$  vaut 0 ou 1 donc est une variable de Bernoulli.

et  $P(X_n=1) = P(A_n) = p_n$

$\Rightarrow$   $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$  et  $E(X_n) = p_n$



d'où on tire  $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$  par linéarité de l'espérance

(13)

$$= \sum_{i=1}^n p_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{4^i} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( n + 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4} \right)^i \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( n + 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{1 - (1/4)^n}{1 - 1/4} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( n + \frac{1}{2} \frac{1 - (1/4)^n}{3/4} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( n + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} (1 - (1/4)^n) \right)$$

$$\boxed{E(S_n) = \frac{1}{3} \left( n + \frac{2}{3} (1 - (1/4)^n) \right)}$$

8.  $T_B = 1$  si le mobile saute en B à l'instant 1 (il est initialement en A)

$$\Rightarrow \boxed{P(T_B = 1) = 1/4}$$

Pour  $P(T_B = 2)$  il faut discuter sur la pos<sup>o</sup> au tps 1 : probas totales

$$P(T_B = 2) = P(T_B = 2 \cap A_1) + P(T_B = 2 \cap B_1) + P(T_B = 2 \cap C_1)$$

↓  
trajet  $A \rightarrow A \rightarrow B$   
de proba  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

arriver pour la 1<sup>o</sup> fois en B au rg 2... ~~etc~~  
être au rg 1 : impossible

↓  
trajet  $A \rightarrow C \rightarrow B$   
proba  $1/4 \times 1/4 = 1/16$

$$\Rightarrow P(T_B=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \left[ \frac{3}{16} \right]$$

8b.  $\boxed{\overline{B_n} = A_n \cup C_n}$  (que dire d'autre ??)

8c.  $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) \cap B_3$   
 $= \left[ (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2) \right] \cap B_3$   
 $= (A_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap B_3)$   
 (4 év<sup>s</sup> incompatibles)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(B_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times P_{A_2}(B_3) \quad (A_1 \text{ ne compte pas ds la dernière conditionnement par propriété de Markov})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

(normal, c'est le chemin  $A \xrightarrow{1/2} A \xrightarrow{1/2} A \xrightarrow{1/4} B$ )

et pour les 3 autres :

$$A \xrightarrow{1/2} A \xrightarrow{1/4} C \xrightarrow{1/4} B$$

$$A \xrightarrow{1/4} C \xrightarrow{1/4} A \xrightarrow{1/4} B$$

$$A \xrightarrow{1/4} C \xrightarrow{1/2} C \xrightarrow{1/4} B$$

d'où  $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{4}$   
 c'est  $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$  par le m<sup>ème</sup> raisonnement.  
 (en factorisant par le dernier  $1/4$ )

On a déduit que :

(14)

$$P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \frac{P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1} \cap B_3)}{P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})} = \frac{1}{4}.$$

d.  $(T_B = k)$  est l'év<sup>r</sup> : arriver pour la 1<sup>o</sup> fois en B au tps k :

$$\underline{(T_B = k) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k = D_{k-1} \cap B_k}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(T_B = k) &= P(D_{k-1} \cap B_k) \\ &= P_{D_{k-1}}(B_k) \times P(D_{k-1}) \end{aligned}$$

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4} P(D_{k-1})$$

Or  $D_{k-1} = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}$  est l'év<sup>r</sup> : ne jamais être passé en B  
au tps k :  $\underline{\underline{D_{k-1} = (T_B \geq k)}}$

$$\Rightarrow P(T_B = k) = \frac{1}{4} P(T_B \geq k)$$

$$P(T_B \geq k) - P(T_B \geq k+1) = \frac{1}{4} P(T_B \geq k)$$

$$\text{d'où on tire } P(T_B \geq k+1) = \frac{3}{4} P(T_B \geq k)$$

$$\text{et avec } P(T_B \geq 1) = 1 \quad ; \quad P(T_B \geq k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

$$\text{puis, } P(T_B = k) = P(T_B \geq k) - P(T_B \geq k+1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^k = \underline{\underline{\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}}$$

$T_B(\Omega) = \mathbb{N}$  donc

$$\begin{aligned} P(T_B = 0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 3/4} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

e. On remarque donc que  $T_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1/4) !!$

donc  $E(T_B)$  existe, et  $E(T_B) = 4$