

Concours Blanc n°2
Maths 2
09/03/2023
Durée : 4h

ESSEC1, 2016
Corrigé

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.

Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.

Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Soit \mathcal{D} l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $E(X)$.
- Il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X , notée F_X , réalise une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de I_X sur $]0, 1[$.
On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0, 1[$ sur I_X . Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0, 1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I- Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel ν tel que $P([X \leq \nu]) = \beta$, et que l'on a $\nu = G_X(\beta)$.

β est dans $]0, 1[$, donc le ν recherché appartient à I_X : en effet hors de I_X , F_X vaut 0 ou 1.

(NB : « hors de I_X » peut être vide...)

Par continuité et stricte croissance de F_X , cette fonction réalise une bijection de I_X dans $]0, 1[$; comme $\beta \in]0, 1[$ on a donc l'existence et l'unicité de $\nu \in I_X$ (et même $\nu \in \mathbb{R}$ d'après la remarque initiale) tel que $F_X(\nu) = \beta$, ce qui s'écrit aussi $P(X \leq \nu) = \beta$.

On a alors $F_X(\nu) = \beta$ avec $\nu \in I_X$ et $\beta \in]0, 1[$, ce qui équivaut à $\nu = F_X^{-1}(\beta) = G_X(\beta)$.

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la « Value at Risk » au niveau de confiance β de X , par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X .
 - On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β .
2. On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$.

- (a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x .

Cours : $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x > 0$.

- (b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a $r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \beta)$.

$X \mapsto \mathcal{E}(\lambda)$ admet bien une espérance (cours), et avec $I_X =]0, +\infty[$, F_X réalise bien une bijection \mathcal{C}^1 strictement croissante de I_X sur $]0, 1[$. On a donc bien $X \in \mathcal{D}$.

Avec $x \in I_X$ et $y \in]0, 1[$, on a : $y = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$; ce qui donne $G_X(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$ et donc

$$r_\beta(X) = G_X(\beta) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \beta)$$

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X , et de paramètres μ et s^2 pour Y .

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ la densité usuelle de cette loi.

- (a) i. Justifier que Φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

Pour tout réel x , $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$ donc Φ est continue (et même \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur \mathbb{R}).

Par propriété d'une fonction de répartition, $\Phi(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $\rightarrow 1$ en $+\infty$; donc Φ réalise bien une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

- ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ , m , σ et x .

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ donc par propriété de la loi normale, $\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour tout réel x on a donc :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

- iii. En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

$E(X)$ existe bien (et vaut m) ; et comme Φ est une bijection \mathcal{C}^1 strictement croissante sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ en est également une. Ceci montre que $X \in \mathcal{D}$, avec $I_X = \mathbb{R}$.

Enfin, $r = r_X(\beta)$ est défini par $F_X(r) = \beta$, et on a :

$$F_X(r) = \beta \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{r-m}{\sigma}\right) = \beta \Leftrightarrow \frac{r-m}{\sigma} = \Phi^{-1}(\beta) \Leftrightarrow r = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$$

ce qui donne bien $r_X(\beta) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

- (b) Quelle est la loi de $X + Y$?

En déduire $r_\beta(X + Y)$ en fonction de m, μ, σ, s et β .

X et Y sont indépendantes, donc par stabilité de la loi normale

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2 + s^2)$$

D'après 3a on a donc

$$r_\beta(X + Y) = m + \mu + \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta)$$

- (c) Pour quels $\beta \in]0, 1[$ a-t-on $r_\beta(X + Y) \leq r_\beta(X) + r_\beta(Y)$?

On a :

$$\begin{aligned} r_\beta(X + Y) \leq r_\beta(X) + r_\beta(Y) &\Leftrightarrow m + \mu + \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta) \leq m + \mu + (\sigma + s)\Phi^{-1}(\beta) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\sigma^2 + s^2}\Phi^{-1}(\beta) \leq (\sigma + s)\Phi^{-1}(\beta) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma - s)\Phi^{-1}(\beta) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $(\sigma + s)^2 = \sigma^2 + s^2 + 2\sigma s \geq \sigma^2 + s^2$ on a par croissance de la racine carrée : $\sigma + s \geq \sqrt{\sigma^2 + s^2}$ et donc

$$\sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma - s \leq 0$$

On a donc

$$(\sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma - s)\Phi^{-1}(\beta) \leq 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

(la fin par stricte croissance de Φ).

On a donc $r_\beta(X + Y) \leq r_\beta(X) + r_\beta(Y)$ ssi $\beta \geq \frac{1}{2}$.

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à \mathcal{D} , c un réel et λ un réel strictement positif.

On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à \mathcal{D} .

- (a) **Montrer que** $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

On rappelle que $r = r_\beta(Y)$ est défini par $F_Y(r) = P(Y \leq r) = \beta$. Or : $P(Y \leq r) = P(X + c \leq r) = P(X \leq r - c) = \beta$ et donc par définition de r_β on obtient $r_\beta(X) = r - c = r_\beta(Y) - c$; soit

$$r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$$

- (b) **Montrer que** $r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X)$.

C'est un raisonnement similaire : si $r = r_\beta(Z)$, on a $P(Z \leq r) = \beta = P(\lambda X \leq r) = P(X \leq \frac{r}{\lambda}) = \beta$ et donc

$$r_\beta(X) = \frac{r}{\lambda} = \frac{r_\beta(Z)}{\lambda} :$$

$$r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X)$$

5. **Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à \mathcal{D} et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.**

- (a) **Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.**

Pour tout x : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Comme $X \leq Y$, on a $Y \leq x \Rightarrow X \leq x$; d'où l'inclusion entre événements $(Y \leq x) \subset (X \leq x)$ puis : $F_Y(x) \leq F_X(x)$ en passant aux probabilités.

- (b) **En déduire que** $r_\beta(X) \leq r_\beta(Y)$.

Évaluée en $x = r_\beta(X)$, l'inégalité précédente donne :

$$F_Y(r_\beta(X)) \leq F_X(r_\beta(X)) = \beta$$

et par stricte croissance de $F_Y^{-1} = G_Y$: $r_\beta(X) \leq G_Y(\beta) = r_\beta(Y)$.

Partie II- Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la « Value at Risk » ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.

On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.

On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes :

- $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à \mathcal{D} , mutuellement indépendantes, de même loi que X.
 - pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \dots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
 - on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
 - pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi : pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leq x$.
6. **Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on compare la valeur de X_k à x ; si $(X_k \leq x)$, on considère qu'on a un succès. La probabilité de ce succès est donc $P(X_k \leq x) = F_X(x)$.

Les X_k étant indépendantes, nos n expériences de Bernoulli ainsi définies le sont aussi.

$N_{x,n}$ compte le nombre de succès : on peut donc conclure que

$$N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))$$

et on a immédiatement $E(N_{x,n}) = nF_X(x)$ et $V(N_{x,n}) = nF_X(x)(1 - F_X(x))$.

7. **On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si U est une variable aléatoire d'espérance m et de variance V , on a**

$$\forall \varepsilon > 0, P(|U - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{\varepsilon^2}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

8. **Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.**

Avec la question précédente, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ($N_{x,n}$ admet une variance) s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|N_{x,n} - nF_X(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{nF_X(x)(1 - F_X(x))}{\varepsilon^2}$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{n}\right) \leq \frac{nF_X(x)(1 - F_X(x))}{\varepsilon^2}$$

Ceci valant pour tout ε , on peut changer ε en $n\varepsilon$: on obtient alors

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{F_X(x)(1 - F_X(x))}{n\varepsilon^2}$$

Le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 pour $n \rightarrow +\infty$ (avec le n au dénominateur). Une probabilité étant toujours positive, on peut conclure par théorème des gendarmes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

NB : démonstration très proche de celle de la loi faible des grands nombres !

- (a) **Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leq x]$ et $[N_{x,n} \geq k]$.**

Les $X_{k,n}$ étant rangés par ordre croissant, on a $X_{k,n} \leq x$ ssi il y a au moins k variables parmi les X_i qui prennent des valeurs inférieures à x ; ce qui équivaut bien à $N_{x,n} \geq k$.

- (b) **En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:**

$$P([X_{k,n} \leq x]) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

$N_{x,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F_X(x))$ donc :

$$\forall r \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(N_{x,n} = r) = \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

On a donc :

$$P([X_{k,n} \leq x]) = P(N_{x,n} \geq k) = \sum_{r=k}^n P(N_{x,n} = r) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

9. **Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

On considère $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (a) **Établir que :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([U_n \geq t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > c \\ 1 & \text{si } t < c \end{cases}$

U_n devenant très proche de c pour n grand, on conçoit que ce résultat est correct. La démo est toutefois assez fine, et repose sur des inclusions d'événements bien construites.

- Si $t > c$, on peut poser $t = c + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$U_n \geq t \Rightarrow U_n - c \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow |U_n - c| \geq \varepsilon$$

(avec seulement des implications, pas des équivalences !!!)

d'où l'inclusion

$$(U_n \geq t) \Rightarrow (|U_n - c| \geq \varepsilon)$$

puis l'inégalité entre probas qui en résulte :

$$0 \leq P(U_n \geq t) \leq P(|U_n - c| \geq \varepsilon)$$

et on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq t) = 0$ par théorème des gendarmes et la limite donnée en hypothèse.

- Si $t < c$, on peut poser $t = c - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$U_n < t \Rightarrow U_n - c < -\varepsilon < 0 \Rightarrow |U_n - c| > \varepsilon$$

Avec les mêmes arguments que précédemment :

$$0 \leq P(U_n < t) \leq P(|U_n - c| > \varepsilon) \leq P(|U_n - c| \geq \varepsilon)$$

et on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n < t) = 0$; puis en passant à l'événement contraire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq t) = 1$$

- (b) **On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \frac{\ell - c}{2}$.**

En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq c + \varepsilon$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([U_n \geq u_n]) = 0$.

$u_n \rightarrow \ell$ donc par définition de la convergence, on a à partir d'un certain rang : $u_n \geq \ell - \varepsilon$.

Donc, à partir d'un certain rang, $u_n \geq c + \varepsilon$.

On se ramène alors à ce qui précède : si $U_n \geq u_n$ et $u_n \geq c + \varepsilon$ alors $U_n \geq c + \varepsilon$; donc par inclusion d'événements :

$$P(U_n \geq u_n) \leq P(U_n \geq c + \varepsilon)$$

Or $P(U_n \geq c + \varepsilon) \rightarrow 0$ d'après la question précédente (avec $t = c + \varepsilon > c$) donc par majoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([U_n \geq u_n]) = 0$$

- (c) **Montrer de même que si $\ell < c$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([U_n \geq u_n]) = 1$.**

Cette fois $\ell < c$ donc on pose $\varepsilon = \frac{c - \ell}{2}$, de sorte que $\ell + \varepsilon = c - \varepsilon$.

À partir d'un certain rang, $u_n \leq \ell + \varepsilon$ donc $u_n \leq c - \varepsilon$.

Dans le cas on a l'implication

$$(U_n \geq c - \varepsilon) \subset (U_n \geq u_n)$$

de sorte que

$$P(U_n \geq c - \varepsilon) \leq P(U_n \geq u_n) \leq 1$$

Or $P(U_n \geq c - \varepsilon) \rightarrow 1$ d'après la question précédente (avec $t = c - \varepsilon < c$) donc par gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([U_n \geq u_n]) = 1$$

10. **On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geq 1$, la variable aléatoire Y_n sur (Ω, \mathcal{A}, P) par $Y_n = X_{[n\beta], n}$ où $[n\beta]$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$. Soit $\varepsilon > 0$.**

- (a) **Montrer que :** $P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = P(Y_n \leq \theta' + \varepsilon) - P(Y_n \leq \theta' - \varepsilon)$.

On peut écrire l'union disjointe d'événements :

$$(Y_n \leq \theta' + \varepsilon) = (Y_n \leq \theta' - \varepsilon) \cup (\theta' - \varepsilon < Y_n \leq \theta' + \varepsilon)$$

ce qui donne :

$$P(Y_n \leq \theta' + \varepsilon) = P(Y_n \leq \theta' - \varepsilon) + P(\theta' - \varepsilon < Y_n \leq \theta' + \varepsilon)$$

Y_n étant à densité on a de plus :

$$P(\theta' - \varepsilon < Y_n \leq \theta' + \varepsilon) = P(\theta' - \varepsilon \leq Y_n \leq \theta' + \varepsilon) = P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon)$$

donc on obtient

$$P(Y_n \leq \theta' + \varepsilon) = P(Y_n \leq \theta' - \varepsilon) + P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon)$$

ce qui donne la formule demandée.

- (b) **En déduire que :**

$$P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = P\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - P\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

Le résultat précédent se réécrit :

$$P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = P(X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leq \theta' + \varepsilon) - P(X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leq \theta' - \varepsilon)$$

et avec 8a se transforme en

$$P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = P(N_{\theta'+\varepsilon,n} \geq \lfloor n\beta \rfloor) - P(N_{\theta'-\varepsilon,n} \geq \lfloor n\beta \rfloor)$$

puis en divisant par $n > 0$:

$$P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = \underbrace{P\left(\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right)}_1 - \underbrace{P\left(\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right)}_2$$

- (c) **En déduire que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon) = 1$.

Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

Il faut compiler beaucoup de résultats précédents. Examinons les 2 termes séparément :

- Terme 1 : $P\left(\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right)$.

On est dans les situations précédentes avec : $U_n = \frac{N_{x,n}}{n}$ et $c = F_X(x)$ (question 7) ; $x = \theta' + \varepsilon$.

Alors $c = F_X(\theta' + \varepsilon) > F_X(\theta') = F_X(R_\beta(X)) = \beta$ (par stricte croissance de F_X) ; et $u_n = \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}$.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} = \beta$.

NB : question relativement classique quand on commence à parler parties entières... L'encadrement usuel :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n\beta - 1 < \lfloor n\beta \rfloor \leq n\beta$$

donne en divisant par $n > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \leq \beta$$

et on conclut par théorème des gendarmes.

On a donc $\ell = \beta$; et $c > \beta$ donc $c > \ell$ ce qui nous met dans la situation de 9c ; et on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) = 1$$

- Terme 2 : $P\left(\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right)$.

Cette fois $x = \theta' - \varepsilon$, et $c = F_X(\theta' - \varepsilon) < F_X(\theta') = \beta = \ell$, d'où d'après 9b :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) = 0$$

On conclut bien de tout cela :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - \theta'| \leq \epsilon) = 1$$

et en passant à l'événement contraire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - \theta'| > \epsilon) = 0$$

ce qui montre que l'estimateur Y_n est convergent.

11. On suppose que l'on a défini une fonction d'en-tête `function R=triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans T rangées dans l'ordre croissant. Par exemple, si $T = [0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 4 \ 2 \ 3]$ alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans =
-1.    0.    0.    2.    2.    3.    4.
```

Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function r=VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de Y_n si le tableau X contient des tirages des variables (X_1, \dots, X_n) , et β la valeur de β .

Il faut renvoyer $Y_n = X_{[n\beta],n}$: le terme numéro $[n\beta]$ de la liste ordonnée des X_k .

```
function r=VaR(X,beta)
    Xord=triCroissant(X)
    indice=floor(length(X)*beta)
    r=Xord(indice)
endfunction
```

Partie III- L'« Expected Shorfall » (ES)

On conserve les notations de la partie 1.

Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certain nombre de propriétés. On dit qu'une fonction ρ définie sur \mathcal{D} à valeurs réelles est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} si elle vérifie les quatre propriétés :

- (R₁) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{R}, \rho(X + c) = \rho(X) + c$
- (R₂) $\forall X \in \mathcal{D}, \forall \lambda > 0, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- (R₃) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$: si pour tout $\omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$
- (R₄) $\forall (X, Y) \in \mathcal{D}^2$ telles que $X + Y \in \mathcal{D}$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

12. Montrer que l'espérance est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .

Par linéarité de l'espérance (les espérances mentionnées existent bien car les variables utilisées sont dans \mathcal{D}) :

- $E(X + c) = E(X) + c$ (propriété R₁)
- $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ (propriété R₂)
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (propriété R₄)

Enfin, par croissance de l'espérance, si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$: propriété R₃.
L'espérance est donc une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .

13. La « Value at Risk » r_β est-elle une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} pour toute valeur de $\beta \in]0, 1[$?
On détaillera si chacune des propriétés de (R_1) à (R_4) est satisfaite ou non.

D'après les questions 4a et 4b, la Value At Risk vérifie R_1 et R_2 ; et d'après 5b elle vérifie R_3 .

Par contre, on a vu que R_4 n'est pas vérifiée dans le cas $\beta < \frac{1}{2}$ pour des variables gaussiennes.

Donc pour $\beta < \frac{1}{2}$, la Value At Risk n'est pas une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .

(NB : pour $\beta \geq \frac{1}{2}$ on ne peut rien conclure sur la propriété R_4 car on n'a étudié que des variables gaussiennes).

Soit X une variable aléatoire appartenant à \mathcal{D} , admettant une densité f_X . On définit l'« Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in]0, 1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} , assez « proche » de r_β .

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à \mathcal{D} .

- (a) Montrer que $ES_\beta(X)$ est bien définie, et que $ES_\beta(X) \geq r_\beta(X)$.

On notera $r_\beta(X) = r_\beta$ pour alléger un peu...

$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta}^{+\infty} x f_X(x) dx$ sera bien définie si l'intégrale en question converge (borne $+\infty$ impropre) ; ce qui est le cas car X admet une espérance ($X \in \mathcal{D}$).

Sur $[r_\beta, +\infty[$, on a $x \geq r_\beta$ et $f_X \geq 0$; donc $x f_X(x) \geq r_\beta f_X(x)$ et en intégrant cette relation :

$$\begin{aligned} ES_\beta(X) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta}^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \frac{1}{1-\beta} r_\beta \int_{r_\beta}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= \frac{r_\beta}{1-\beta} P(X \geq r_\beta) \\ &= \frac{r_\beta}{1-\beta} (1 - \underbrace{F_X(r_\beta)}_{=\beta}) \\ &= r_\beta \end{aligned}$$

et on conclut donc

$$ES_\beta(X) \geq r_\beta(X)$$

- (b) À l'aide du changement de variable $t = F_X(x)$, établir :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t) dt \quad (2)$$

On passe sur un segment pour le changement de variable : soit $A > r_\beta$ et l'intégrale :

$$\int_{r_\beta}^A x f_X(x) dx$$

Avec ce changement de variable, on a $x = F_X^{-1}(t) = G_X(t)$; les bornes deviennent :

- $x = r_\beta$ donc $t = F_X(r_\beta) = \beta$
- $x = A$ donc $t = F_X(A)$

Enfin, $dt = F'_X(x) dx$.

Avec tout ça :

$$\int_{r_\beta}^A x f_X(x) dx = \int_\beta^{F_X(A)} G_X(t) dt$$

et pour $A \rightarrow +\infty$, on a $F_X(A) \rightarrow 1$ (propriété d'une fonction de répartition), d'où

$$\int_{r_\beta}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_\beta^1 G_X(t) dt$$

et donc finalement :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_X(t) dt$$

On pourra ainsi utiliser (1) ou (2) au choix dans la suite pour définir $ES_\beta(X)$.

15. (a) **Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_1) .**

On a vu en 4a que : $\forall \beta \in]0, 1[, r_\beta(X+c) = r_\beta(X) + c$.

Ceci équivaut à $G_{X+c}(\beta) = G_X(\beta) + c$; et comme ça vaut pour tout β dans $]0, 1[$:

$$G_{X+c} = G_X + c$$

On injecte cela dans la forme (2) :

$$\begin{aligned} ES_\beta(X+c) &= \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 G_{X+c}(t) dt \\ &= \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 (G_X(t) + c) dt \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left(\int_\beta^1 G_X(t) dt + \int_\beta^1 c dt \right) \\ &= ES_\beta(X) + c \end{aligned}$$

et on peut conclure que ES_β vérifie R_1 .

- (b) **Montrer que ES_β vérifie la propriété (R_2) .**

De même avec 4b : $\forall \beta \in]0, 1[, r_\beta(\lambda X) = \lambda r_\beta(X)$; donc $G_{\lambda X+c} = \lambda G_X$; et donc

$$ES_\beta(\lambda X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 \lambda G_X(t) dt = \lambda ES_\beta(X)$$

16. **On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.**

- (a) **Montrer que $ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{\lambda}$.**

On utilise l'expression (2).

D'après 2b, $G_X(t) = r_t(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-t)$ pour tout $t \in]0, 1[$.

Donc

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta} \int_\beta^1 -\frac{1}{\lambda} \ln(1-t) dt$$

Calculons $\int_\beta^1 \ln(1-t) dt$. On pose $A \rightarrow 1$ et on effectue une IPP :

$$\begin{aligned} \int_\beta^A \ln(1-t) dt &= [t \ln(1-t)]_\beta^A + \int_\beta^A \frac{t}{1-t} dt \\ &= A \ln(1-A) - \beta \ln(1-\beta) + \int_\beta^A \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= A \ln(1-A) - \beta \ln(1-\beta) + \int_\beta^A -(A-\beta) - [\ln(1-t)]_\beta^A \\ &= (A-1) \ln(1-A) + (1-\beta) \ln(1-\beta) + \beta - A \end{aligned}$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ on trouve $\lim_{A \rightarrow 1} (A - 1) \ln(1 - A) = 0$; donc en faisant tendre A vers 1 dans le calcul précédent :

$$\int_{\beta}^1 \ln(1 - t) dt = (1 - \beta) \ln(1 - \beta) + \beta - 1$$

On en déduit alors :

$$\mathbf{ES}_{\beta}(X) = \frac{-1}{\lambda(1-\beta)} ((1-\beta) \ln(1-\beta) + \beta - 1) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta) = \frac{1}{\lambda} + r_{\beta}(X)$$

en reprenant l'expression de 2b.

(b) **En déduire que** $\mathbf{ES}_{\beta}(X) \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} r_{\beta}(X)$.

$\mathbf{ES}_{\beta}(X) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta)$. Pour $\beta \rightarrow 1^-$, $\frac{1}{\lambda}$ est fixé alors que le second terme tend vers $+\infty$; l'équivalent est donc ce second terme.

Ainsi

$$\mathbf{ES}_{\beta}(X) \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\beta) = r_{\beta}(X)$$

17. **On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.**

(a) **Montrer** $\mathbf{ES}_{\beta}(X) = \frac{\varphi(r_{\beta}(X))}{1 - \Phi(r_{\beta}(X))}$.

On utilise cette fois la forme (1) et l'expression de la densité usuelle de $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{ES}_{\beta}(X) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{r_{\beta}(X)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{r_{\beta}(X)}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r_{\beta}^2/2} \quad \text{en passant par une borne } A \rightarrow +\infty \\ \mathbf{ES}_{\beta}(X) &= \frac{1}{1-\beta} \varphi(r_{\beta}(X)) \end{aligned}$$

Or $\Phi(r_{\beta}(X)) = \Phi(\Phi^{-1}(\beta)) = \beta$ par définition de r_{β} ; et on obtient bien :

$$\mathbf{ES}_{\beta}(X) = \frac{\varphi(r_{\beta}(X))}{1 - \Phi(r_{\beta}(X))}$$

(b) **Pour tout** $x > 0$, **établir l'égalité** : $1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$.

Soit $A \rightarrow +\infty$. Une IPP donne

$$\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\varphi(t)}{t} \right]_x^A + \int_x^A \frac{\varphi'(t)}{t} dt$$

Or $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, donc on voit que $\frac{\varphi'(t)}{t} = -\varphi(t)$; ce qui donne :

$$\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(A)}{A} - \int_x^A \varphi(t) dt$$

Pour $A \rightarrow +\infty$: $\frac{\varphi(A)}{A} \rightarrow 0$ par croissances comparées ; et

$$\int_x^A \varphi(t) dt \rightarrow \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = 1 - \Phi(x)$$

et on récupère au passage la convergence de l'intégrale en jeu dans cette question.

On trouve finalement :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \frac{\varphi(x)}{x} - (1 - \Phi(x))$$

ce qui donne l'égalité demandée.

(c) **Montrer que, pour tout $x > 0$:** $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} (1 - \Phi(x)).$

En déduire que : $1 - \Phi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$

$\frac{\varphi(t)}{t^2}$ étant positif on a directement : $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$

De plus, sur $[x, +\infty[$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$, et en multipliant par $\varphi(t) \geq 0$:

$$\forall t \geq x, \frac{\varphi(t)}{t^2} \leq \frac{\varphi(t)}{x^2}$$

et on peut alors intégrer sur $[x, +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1 - \Phi(x)}{x^2}$$

On a donc bien l'encadrement demandé.

On vient de voir que $1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$; donc

$$1 = \frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1 - \Phi(x)} - \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt}{1 - \Phi(x)} \quad (*)$$

et avec ce qui précède :

$$0 \leq \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt}{1 - \Phi(x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

donc $\frac{\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt}{1 - \Phi(x)}$ tend vers 0 pour $x \rightarrow +\infty$; et $\frac{\frac{\varphi(x)}{x}}{1 - \Phi(x)}$ tend donc vers 1 d'après (*).

On a bien

$$\frac{\varphi(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \Phi(x)$$

(d) **En conclure que l'on a aussi dans ce cas :** $\text{ES}_\beta(X) \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} r_\beta(X).$

On cherche alors à utiliser 17a.

Pour $\beta \rightarrow 1$, $r_\beta(X) = G_X(\beta) = F_X^{-1}(\beta) \rightarrow +\infty$; d'où $1 - \Phi(r_\beta) \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} \frac{\varphi(r_\beta)}{r_\beta}$ et finalement

$$\text{ES}_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1 - \Phi(r_\beta(X))} \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} r_\beta$$

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à \mathcal{D} .

- On note h la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(x, 0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que : $0 \leq U \leq V$ et $E(V)$ existe, alors $E(U)$ existe et $0 \leq E(U) \leq E(V)$.
- On note pour tout événement A , 1_A la variable aléatoire indicatrice de l'événement A . Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. (a) **Montrer que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance, et que l'on a :**

$$E(h(X - r_\beta(X))) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) dt - (1 - \beta) r_\beta(X)$$

où f_X désigne une densité de X .

$r_\beta(X)$ est ici une constante ; on va la noter r_β . On s'intéresse donc à la convergence absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta) f_X(t) dt$$

On remarque

$$h(x) = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

de sorte que

$$h(t - r_\beta) = \begin{cases} t - r_\beta & \text{si } t \geq r_\beta \\ 0 & \text{si } t < r_\beta \end{cases}$$

ce qui restreint le domaine d'intégration : on obtient

$$\int_{r_\beta}^{+\infty} (t - r_\beta) f_X(t) dt = \int_{r_\beta}^{+\infty} t f_X(t) dt - r_\beta \int_{r_\beta}^{+\infty} f_X(t) dt$$

et donc une somme de deux intégrales absolument convergentes (la première car $X \in \mathcal{D}$ admet une espérance ; la seconde comme intégrale d'une densité).

On a aussi :

$$\int_{r_\beta}^{+\infty} f_X(t) dt = P(X \geq r_\beta) = 1 - F_X(r_\beta) = 1 - \beta$$

d'où finalement :

$$E(h(X - r_\beta(X))) = \int_{r_\beta}^{+\infty} t f_X(t) dt - r_\beta(1 - \beta)$$

(b) **En déduire :**

$$ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1 - \beta} E(h(X - r_\beta(X))).$$

Avec l'expression 1 de ES , on reconnaît :

$$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) dt = (1 - \beta) ES_\beta(X)$$

et donc

$$E(h(X - r_\beta(X))) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t) dt - (1 - \beta) r_\beta(X) = (1 - \beta)(ES_\beta(X) - r_\beta(X))$$

ce qui équivaut à l'expression demandée.

19. **Question maison, l'originale est en commentaire.** On cherche à estimer à l'aide de Scilab une valeur approchée de $ES_\beta(X)$. On applique pour cela la *méthode de Monte-Carlo*. On dispose d'une liste X de n tirages de la variable X , et la valeur de β se trouve dans la variable `beta`.

(a) **Donner un code calculant la moyenne des n valeurs de $h(X - r_\beta(X))$ correspondant aux valeurs de X fournies.**

On rappelle que la fonction `VaR` estime $r_\beta(X)$.

$h(X - r_\beta(X))$ vaut 0 si $X < r_\beta$ et $X - r_\beta$ si $X \geq r_\beta$.

```
n=length(X)
r=VaR(X,beta)
S=0
for k=1:n
    if X(k) >= r
        S=S+X(k)-r
    end
end
m=S/n
```

- (b) **En supposant que cette moyenne fournit une approximation de $E(h(X - r_\beta(X)))$, donner un code Scilab renvoyant une valeur approchée de $ES_\beta(X)$.**

Il suffit d'appliquer la formule de 18b :

$$ES_b = r + m / (1 - \beta)$$

où m est le résultat du script précédent.

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $E(Z) = 1$ et $0 \leq Z \leq \frac{1}{1-\beta}$.

- (a) **Justifier l'égalité entre variables aléatoires :** $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]}$.

Comme dit en 19a, $h(X - r_\beta(X))$ vaut 0 si $X - r_\beta < 0$ et $X - r_\beta$ si $X - r_\beta \geq 0$;

et $\mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]}$ vaut 0 si $X - r_\beta < 0$ et 1 si $X - r_\beta \geq 0$;

donc on voit bien que $h(X - r_\beta(X)) = (X - r_\beta(X)) \times \mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]}$ dans les deux cas.

- (b) **Montrer que $E(XZ)$ existe et établir l'égalité :**

$$ES_\beta(X) - E(XZ) = \frac{1}{1-\beta} E \left[(X - r_\beta(X)) (\mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \right]$$

Partons du terme de droite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} E \left[(X - r_\beta(X)) (\mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z) \right] &= \frac{1}{1-\beta} E \left[(X - r_\beta(X)) \mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]} \right] - E((X - r_\beta)Z) \\ &= ES_\beta - r_\beta - E(XZ) + r_\beta E(Z) \quad \text{d'après 18b} \\ &= ES_\beta - E(XZ) \quad \text{avec } E(Z) = 1 \end{aligned}$$

- (c) **En déduire que $ES_\beta(X) - E(XZ) \geq 0$.**

Comment choisir Z pour que $ES_\beta(X) = E(XZ)$?

On examine le signe de la variable aléatoire $(X - r_\beta(X)) (\mathbf{1}_{[X > r_\beta(X)]} - (1-\beta)Z)$.

- Si $X > r_\beta$: alors $\mathbf{1}_{[X > r_\beta]} = 1$; et comme $0 \leq Z \leq \frac{1}{1-\beta}$ on a $(1-\beta)Z \leq 1$; d'où en compilant tout ça :

$$(X - r_\beta)(\mathbf{1}_{[X > r_\beta]} - (1-\beta)Z) \geq 0$$

- Si $X \leq r_\beta$: alors $\mathbf{1}_{[X > r_\beta]} = 0$; et $-(1-\beta)Z \leq 0$ car $Z \geq 0$ et $\beta < 1$. Donc ici encore :

$$(X - r_\beta)(\mathbf{1}_{[X > r_\beta]} - (1-\beta)Z) \geq 0$$

L'espérance d'une variable positive est positive ; et $\frac{1}{1-\beta} > 0$; donc finalement $ES_\beta(X) - E(XZ) \geq 0$.

Pour obtenir l'égalité, il suffit que la variable dont on vient de calculer l'espérance soit nulle : donc que

- $(1-\beta)Z = 1$ ssi $X > r_\beta$;
- $(1-\beta)Z = 0$ ssi $X \leq r_\beta$.

On choisit donc

$$Z = \frac{1}{1-\beta} \mathbf{1}_{[X > r_\beta]}$$

Z prend les valeurs 0 et $\frac{1}{1-\beta}$ donc on a bien $0 \leq Z \leq \frac{1}{1-\beta}$; et de plus

$$E(Z) = \frac{1}{1-\beta} E(\mathbf{1}_{[X > r_\beta]}) = \frac{1}{1-\beta} P(X > r_\beta) = \frac{1}{1-\beta} (1 - \underbrace{F_X(r_\beta)}_{=\beta}) = 1$$

21. On note \mathcal{K} l'ensemble des variables aléatoires Z sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $E(Z) = 1$ et $0 \leq Z \leq \frac{1}{1-\beta}$.

Justifier l'égalité : $ES_{\beta}(X) = \max_{Z \in \mathcal{K}} (E(XZ))$.

On a montré en 20c que

$$\forall Z \in \mathcal{K}, E(XZ) \leq ES_{\beta}(X)$$

et que l'égalité est atteinte pour la variable (appartenant à \mathcal{K}) donnée également en 20c ; ceci montre bien que :

$$ES_{\beta}(X) = \max_{Z \in \mathcal{K}} (E(XZ)).$$

22. Démontrer que, pour tout $\beta \in]0, 1[$, la fonction ES_{β} est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .

On a déjà montré les propriétés R_1 et R_2 (question 15).

- Si $X \leq Y$, alors pour tout $Z \in \mathcal{K}$, $XZ \leq YZ$ (on a $Z \geq 0$) ; donc $E(XZ) \leq E(YZ)$ d'après la propriété admise ; et donc

$$\max_{Z \in \mathcal{K}} (E(XZ)) \leq \max_{Z \in \mathcal{K}} (E(YZ))$$

On a bien $ES_{\beta}(X) \leq ES_{\beta}(Y)$: R_3 est vérifiée.

- Soient X et Y deux variables de \mathcal{D} .
Pour tout $Z \in \mathcal{K}$, XZ , YZ et $(X+Y)Z$ admettent des espérances ; et

$$\forall Z \in \mathcal{K}, E((X+Y)Z) = E(XZ) + E(YZ) \leq ES_{\beta}(X) + ES_{\beta}(Y)$$

(ces ES_{β} étant les valeurs maximales de $E(XZ)$ et $E(YZ)$).

D'où $\max_{Z \in \mathcal{K}} (E((X+Y)Z)) \leq ES_{\beta}(X) + ES_{\beta}(Y)$ ce qui donne bien

$$ES_{\beta}(X+Y) \leq ES_{\beta}(X) + ES_{\beta}(Y)$$

et R_4 est vérifiée.

Les 4 propriétés sont vérifiées : ES_{β} est une mesure de risque cohérente sur \mathcal{D} .