

## Concours Blanc n°2

Maths 2  
09/03/2023

Durée : 4h

ESSEC2, 2010

Corrigé

L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service...) démarré à la date  $t = 0$  et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pour toute variable aléatoire  $Y$ , on notera  $E(Y)$  son espérance lorsqu'elle existe.

On adoptera les conventions suivantes. On dira qu'une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et continue à droite en 0 est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . En outre, si  $T$  est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , sa fonction de répartition  $F_T(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et dérivable à droite en 0. On conviendra d'écrire  $F'_T(t) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $F'_T(0)$  désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

## 1 Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$  (avec  $\mu > 0$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f_\mu$  définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

(a) Donner l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .

$$\text{Cours : } E(X) = \frac{1}{\mu} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

(b) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $X^n$  admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre  $E(X^{n+1})$  et  $E(X^n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

Par théorème de transfert, on examine la convergence absolue de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\mu(x) dx = \mu \int_0^{+\infty} x^n e^{-\mu x} dx$$

La fonction à intégrer est  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0, +\infty[$  ; et par croissances comparées,  $x^2 x^n e^{-\mu x} \rightarrow 0$  pour  $x \rightarrow +\infty$  ; donc

$$x^n e^{-\mu x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge (Riemann,  $\alpha = 2 > 1$ ) donc par comparaison de fonctions positives  $\int_1^{+\infty} x^n e^{-\mu x} dx$  converge absolument et donc  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\mu x} dx$  aussi.

Donc  $E(X^n)$  existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $A > 0$  : une IPP classique (les fonctions en jeu sont  $\mathcal{C}^1$ ) donne

$$\int_0^A \mu x^{n+1} e^{-\mu x} dx = [-x^{n+1} e^{-\mu x}]_0^A + (n+1) \int_0^A x^n e^{-\mu x} dx = -A^{n+1} e^{-\mu A} + \int_0^A (n+1) x^n e^{-\mu x} dx$$

Avec  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{n+1} e^{-\mu A} = 0$  (croissances comparées) et la convergence des intégrales en jeu, on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \mu x^{n+1} e^{-\mu x} dx = \int_0^{+\infty} (n+1)x^n e^{-\mu x} dx$$

et donc

$$E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} E(X^n)$$

(c) **En déduire  $E(X^n)$  pour tout  $n > 0$ .**

Une exploration indique, en utilisant la formule précédente, que

$$E(X^n) = \frac{n}{\mu} E(X^{n-1}) = \frac{n}{\mu} \frac{n-1}{\mu} E(X^{n-2}) = \dots = \frac{n!}{\mu^n} E(X^0) = \frac{n!}{\mu^n}$$

Montrons cela par récurrence sur  $n$  : soit  $\mathcal{P}(n)$  : « $E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$ »

- $X^0 = 1$  donc  $E(X^0) = 1 = \frac{0!}{\mu^0}$  : c'est vrai au rang  $n = 0$  ;
- Supposons que  $E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$  ; alors  $E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} \frac{n!}{\mu^n} = \frac{(n+1)!}{\mu^{n+1}}$  et on a bien l'hérédité ; ce qui achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$$

(d) **Retrouver la valeur de  $V(X)$  à l'aide de la question précédente.**

Notamment, pour  $n = 2$  :  $E(X^2) = \frac{2}{\mu^2}$  ; et donc avec König-Huygens on trouve

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

ce qui est la valeur donnée précédemment.

## 2. Propriété caractéristique.

(a) **Soient  $\mu > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .**

**Calculer  $P(X > x)$  pour tout  $x$  réel positif.**

**Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$ ,**

$$P_{[X > x]}(X > x + y) = P(X > y)$$

Calcul usuel : pour tout  $x \geq 0$ ,  $P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_\mu(t) dt = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t} dt$ . Avec  $A > 0$  :

$$\int_x^A \mu e^{-\mu t} dt = -[e^{-\mu t}]_x^A = e^{-\mu x} - e^{-\mu A} \rightarrow e^{-\mu x} \quad \text{pour } A \rightarrow +\infty$$

et on a donc  $P(X > x) = e^{-\mu x}$ .

Pour tous  $x > 0, y > 0$  on peut écrire :

$$P_{(X > x)}(X > x + y) = \frac{P(X > x + y \cap X > x)}{P(X > x)}$$

Or  $(X > x + y) \cap (X > x) = (X > x + y)$  car le premier de ces événements est inclus dans le second.

Donc

$$P_{(X > x)}(X > x + y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu y} = P(X > y)$$

(propriété dite de loi sans mémoire ; qui caractérise la loi exponentielle comme on va le voir ci-dessous).

- (b) **Réciproquement, soit  $X$  une variable aléatoire positive admettant une densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ , et telle que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$ ,**

$$P_{[X>x]}(X > x + y) = P(X > y)$$

- i. **Soit  $R(x) = P(X > x)$ . Justifier que  $R(x)$  est non nul pour tout réel positif. Montrer que  $R' = -f$ .**  
 $R(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$  où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .  
 Comme  $X$  admet une densité strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 De plus elle tend vers 1 en  $+\infty$  (propriété d'une fonction de répartition) ; d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) < 1$$

et donc  $R(x) = 1 - F(x) > 0$ .

On a aussi  $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$  ce qui donne en dérivant le terme  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  (l'autre est constant) et avec le théorème fondamental de l'analyse :

$$R'(x) = -f(x)$$

- ii. **On pose  $\mu = f(0)$ . Montrer que pour tout  $x$  réel positif, on a la relation  $R'(x) + \mu R(x) = 0$ .**

On passe par le taux de variation : soient  $x \geq 0$  et  $y > 0$ .

Comme  $R$  est dérivable en  $x$  on a  $R'(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{R(x+y) - R(x)}{y}$

Or par hypothèse :  $P_{[X>x]}(X > x + y) = P(X > y)$ , ce qui donne avec les calculs précédents  $P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y)$ , et donc  $R(x+y) = R(x)R(y)$ .

Ainsi :

$$\frac{R(x+y) - R(x)}{y} = R(x) \frac{R(y) - 1}{y} = R(x) \frac{R(y) - R(0)}{y}$$

car comme  $X$  est positive et à densité,  $R(0) = P(X > 0) = P(X \geq 0) = 1$ . En faisant tendre  $y$  vers 0, on trouve donc

$$\forall x \geq 0, R'(x) = R(x) \times R'(0)$$

Or  $f'(0) = -f(0) = -\mu$  : on a bien montré :

$$\forall x \geq 0, R'(x) + \mu R(x) = 0$$

- iii. **Calculer la dérivée de  $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .**

On trouve

$$x \mapsto R(x)\mu e^{\mu x} + R'(x)e^{\mu x} = (\mu R(x) + R'(x))e^{\mu x} = 0$$

d'après le point précédent.

- iv. **Déduire que  $X$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.**

Cette dernière fonction est de dérivée nulle sur  $\mathbb{R}_+$ , donc est constante sur cet intervalle : il existe un réel  $K$  tel que

$$\forall x \geq 0, R(x)e^{\mu x} = K \Leftrightarrow R(x) = Ke^{-\mu x}$$

et on en déduit

$$\forall x \geq 0, f(x) = -R'(x) = K\mu e^{-\mu x}$$

De plus,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$  car  $X$  est à valeurs positives.

On obtient donc

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ K\mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Reste à trouver  $K$ ... mais on se souvient qu'une densité est d'intégrale 1.

Si  $f$  est la fonction définie ci-dessus, on a en reconnaissant l'intégrale de la densité usuelle de  $\mathcal{E}(\mu)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = K \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu x} dx = K$$

et on a donc  $K = 1$ .

Conclusion :  $X$  admet pour densité  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  ; et on reconnaît  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ .

3. Soient deux réels strictement positifs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

- (a) On pose  $Y = \max(X_1, X_2)$ . Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$  et en déduire une densité de la variable  $Y$ .

Loi du max usuelle : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Y \leq x$  ssi  $X_1 \leq x$  et  $X_2 \leq x$  ; d'où avec l'indépendance de  $X_1$  et  $X_2$  :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = F_{\mu_1}(x)F_{\mu_2}(x)$$

où  $F_\mu$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{E}(\mu)$ .

On obtient une fonction  $\mathcal{C}^0$ ,  $\mathcal{C}^1$  sauf éventuellement en 0 ; et en dérivant :

$$f_Y(x) = f_{\mu_1}(x)F_{\mu_2}(x) + F_{\mu_1}(x)f_{\mu_2}(x)$$

Pour  $x < 0$ , les  $f(x)$  sont nuls donc  $f_Y(x) = 0$  ; on peut poser  $f_Y(0) = 0$  ;

et pour  $x > 0$  on obtient

$$f_Y(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}(1 - e^{-\mu_2 x}) + \mu_2 e^{-\mu_2 x}(1 - e^{-\mu_1 x})$$

- (b) On pose  $Z = \min(X_1, X_2)$ . Déterminer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$  et en déduire la loi de  $Z$ .

Cette fois

$$P(Z > x) = P(X_1 > x \cap X_2 > x) = P(X_1 > x)P(X_2 > x)$$

ce qui donne  $(1 - F_Z(x)) = (1 - F_{\mu_1}(x))(1 - F_{\mu_2}(x))$ .

Avec  $F_\mu(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ , et  $= 1 - e^{-\mu x}$  pour  $x > 0$ , on trouve

$$1 - F_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et on reconnaît assez rapidement  $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$ .

## 2 Fiabilité

Soit  $T$  une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que  $T$  est une variable à densité  $f_T$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On appelle *fiabilité* de  $T$  la fonction  $R_T$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$R_T(t) = P(T \geq t) = P(T > t) = 1 - F_T(t)$$

où  $F_T$  est la fonction de répartition de  $T$ .

4. Soient  $t$  un réel positif ou nul et  $h$  un réel strictement positif.

La dégradation du système sur l'intervalle  $[t, t+h]$  est mesurée par la probabilité  $P(t \leq T \leq t+h)$ .

Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction  $R_T$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $h \geq 0$  :

$$P(t \leq T \leq t+h) = P(T \leq t+h) - P(T \leq t) = 1 - P(T > t+h) - (1 - P(T > t)) = P(T > t) - P(T > t+h) = R_T(t) - R_T(t+h)$$

5. Montrer que, pour tout réel  $t$  positif ou nul,

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = f_T(t)$$

On déduit de ce qui précède que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} = -R'_T(t)$$

or  $R_T = 1 - F_T$ , donc  $R'_T = -F'_T = -f_T$ ; et finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = f_T(t)$$

6. (a) Justifier que pour tout réel  $t$  positif,  $R_T(t) > 0$ .

Ce sont les mêmes arguments qu'en 2b(i) : densité  $> 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc fonction de répartition strictement croissante ; donc  $R_T(t) = 1 - F_T(t) > 0$ .

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par le rapport  $\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$ .

(b) Soit la fonction  $K : t \mapsto \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)$ . Montrer que  $\lambda = K'$ .

On a  $K(t) = -\ln(R_T(t))$ .  $R_T = 1 - F$  est dérivable car  $X$  est à densité continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $R_T > 0$  d'après 6a, donc  $K$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a alors  $K'(t) = -\frac{R'_T(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$  (dérivée de  $R_T$  vue en 5).

(c) Dédurre l'expression de  $R_T$  en fonction de  $\lambda$  à l'aide d'une intégrale.

On voit donc que  $\lambda = K'$  ; on peut donc écrire

$$K(t) - K(0) = \int_0^t K'(u) du = \int_0^t \lambda(u) du$$

Or  $K(t) = \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)$  et

$$K(0) = \ln\left(\frac{1}{R_T(0)}\right) = \ln\left(\frac{1}{P(X > 0)}\right) = \ln(1) = 0$$

et donc

$$\forall t \geq 0, \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = \int_0^t \lambda(u) du$$

ce qui équivaut encore à  $R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right)$ .

7. Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle positive de densité  $g$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , admettant une espérance. On pose  $R_Z(t) = P(Z > t)$  pour  $t \geq 0$ .

(a) Soit  $v$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $v(t) = tR_Z(t)$ .

Montrer que :

$$tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$$

où  $v'$  désigne la dérivée de  $v$ .

$R_Z$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $v$  l'est aussi : on a

$$\forall t \geq 0, v'(t) = R_Z(t) + tR'_Z(t) = R_Z(t) - tg(t)$$

et donc  $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ .

(b) **Montrer que**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ .

On a  $v(t) = tR_Z(t) = t \int_t^{+\infty} g(u) du$ .

$g$  admet une espérance, donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} ug(u) du = \int_0^{+\infty} ug(u) du$  converge ; et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} ug(u) du = 0$$

Comme la fonction  $g$  est positive, on peut écrire :

$$\forall u \geq t, ug(u) \geq tg(u)$$

et en intégrant des fonctions continues :

$$\int_t^{+\infty} ug(u) du \geq \int_t^{+\infty} tg(u) du = t \int_t^{+\infty} g(u) du = v(t)$$

Toutes les quantités étant positives, on a montré :

$$\forall t \geq 0, 0 \leq v(t) \leq \int_t^{+\infty} ug(u) du$$

et le terme de droite tendant vers 0 on conclut par théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$$

(c) **En déduire que**  $E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t) dt$ .

$E(Z)$  existe par hypothèse, et vaut  $\int_0^{+\infty} tg(t) dt$  ( $Z$  étant à valeurs positives).

Soit  $A > 0$  : d'après 7a,

$$\int_0^A tg(t) dt = \int_0^A R_Z(t) dt - \int_0^A v'(t) dt = \int_0^A R_Z(t) dt - (v(A) - v(0))$$

d'où  $\int_0^A R_Z(t) dt = \int_0^A tg(t) dt + v(A)$  (car  $v(0) = 0$ ).

Pour  $A \rightarrow +\infty$ ,  $v(A) \rightarrow 0$  et  $\int_0^A tg(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} tg(t) dt = E(Z)$  ; et on obtient donc

$$\int_0^{+\infty} R_Z(t) dt \text{ converge, et vaut } E(Z).$$

8. **On suppose désormais que  $T$  admet une espérance. Soit  $t$  un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date  $t$ , on appelle durée de survie la variable aléatoire  $T_t = T - t$  représentant le temps s'écoulant entre la date  $t$  et la première panne.**

**On a donc, pour tout réel  $x$  positif :**

$$R_{T_t}(x) = P(T_t > x) = P_{[T > t]}(T > t + x)$$

(a) **Montrer que, pour tout réel  $x$  positif,**

$$R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$$

d'après l'expression fournie :

$$\forall x \geq 0, R_{T_t}(x) = \frac{P(T > t+x \cap T > t)}{P(T > t)}$$

Comme  $x \geq 0$  on a l'inclusion  $(T > T+x) \subset (T > t)$  ; de sorte que

$$\forall x \geq 0, R_{T_t}(x) = \frac{P(T > t+x)}{P(T > t)} = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$$

(b) En déduire que

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du$$

On cherche à appliquer 7c, sous réserve que  $T_t$  admette une espérance ; ce qui est le cas car  $T_t = T - t$ .

On peut donc écrire :

$$E(T_t) = \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} dt = \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x) dt = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du$$

en posant  $u = t + x$  dans la dernière intégrale.

**Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.**

9. (a) On suppose que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

Si  $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ , sa fiabilité vaut  $R_T(t) = P(T > t) = e^{-\mu t}$  (calcul classique, vu en 2a).

Son taux de défaillance vaut :

$$\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$$

- (b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

Le système tombant en panne dès qu'un des deux composants tombe en panne, sa durée de vie est  $T = \min(T_1, T_2)$ . On sait alors d'après 3b que  $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$  et on déduit des calculs de 9a que la fiabilité vaut  $e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}$ , et le taux de défaillance  $\mu_1 + \mu_2$ .

- (c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . Déterminer la fiabilité du système.

Cette fois, le système ne tombe en panne que lorsque ses deux composants sont tombés en panne : on a  $T = \max(T_1, T_2)$ .

On a alors vu en 3a que  $F_T = F_{T_1} F_{T_2}$  et donc la fiabilité est donnée par

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) = 1 - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t}) \quad (\text{pour } t \geq 0)$$

En simplifiant :

$$\forall t \geq 0, R_T(t) = e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} - e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}$$

10. Soit  $\varphi_{n,\beta}$  la fonction définie par

$$\varphi_{n,\beta}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où  $\beta > 0$  est une constante strictement positive et  $n$  un entier naturel non nul.

- (a) Vérifier que  $\varphi_{n,\beta}$  est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

Il est clair que  $\varphi_{n,\beta}$  est positive, et continue sauf éventuellement en 0.

Calculons, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du$$

en posant  $u = \beta t$ .

On a la convergence de cette dernière intégrale par test de Riemann, comme fait en 1b.

De plus,  $\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = E(X^{n-1})$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$  ; d'après 1c on a donc

$$\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{1}{(n-1)!}$$

ce qui donne finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = 1$$

et  $\varphi_{n,\beta}$  est bien une densité de probabilité.

(b) **On suppose que T a pour densité la fonction  $\varphi_{n,\beta}$ . Montrer que la fiabilité à la date  $t$  est**

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

On sait :

$$\forall x \geq 0, R_T(x) = \int_x^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\beta x}^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du$$

Soit  $A > \beta x$  : on effectue une IPP (toutes les fonctions en jeu sont  $\mathcal{C}^1$ ) :

$$\int_{\beta x}^A u^{n-1} e^{-u} du = [-u^{n-1} e^{-u}]_{\beta x}^A + (n-1) \int_{\beta x}^A u^{n-2} e^{-u} du$$

Pour  $A \rightarrow +\infty$  et avec des croissances comparées on obtient :

$$\int_{\beta x}^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = (\beta x)^{n-1} e^{-\beta x} + (n-1) \int_{\beta x}^A u^{n-2} e^{-u} du$$

et donc en divisant par  $(n-1)! > 0$  :

$$R_T(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\beta x}^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x} + \frac{1}{(n-2)!} \int_{\beta x}^{+\infty} u^{n-2} e^{-u} du$$

On peut itérer cette opération pour obtenir :

$$\begin{aligned} R_T(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\beta x}^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x} + \frac{(\beta x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\beta x} + \dots + \frac{(\beta x)}{1!} e^{-\beta x} + \int_{\beta x}^{+\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x} + \frac{(\beta x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\beta x} + \dots + \frac{(\beta x)}{1!} e^{-\beta x} + e^{-\beta x} \\ &= e^{-\beta x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^k}{k!} \end{aligned}$$

11. Soit  $\psi_{\beta,\eta}$  la fonction définie par

$$\psi_{\beta,\eta}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\beta \geq 1, \eta > 0$ .

(a) **Vérifier que  $\psi_{\beta,\eta}$  est une densité de probabilité (loi de Weibull).**

Il est clair que  $\psi_{\beta,\eta}$  est positive, et continue sauf éventuellement en 0.

Calculons, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt$$



On peut poser  $u = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$  dans cette dernière intégrale. Alors  $du = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} dt$  et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$$

donc  $\psi_{\beta,\eta}$  est bien une densité de probabilité.

- (b) **On suppose que T a pour densité la fonction  $\psi_{\beta,\eta}$ . Déterminer la fiabilité  $R_T(t)$  et le taux de défaillance  $\lambda(t)$  à la date  $t$ .**

Avec le même changement de variable : Soit  $x \geq 0$  et  $A \geq x$  :

$$\begin{aligned} \int_x^A \psi_{\beta,\eta}(t) dt &= \int_x^A \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt = \int_{(x/\eta)^\beta}^{(A/\eta)^\beta} e^{-u} du = \exp\left(-(x/\eta)^\beta\right) - \exp\left(-(A/\eta)^\beta\right) \\ &\rightarrow \exp\left(-(x/\eta)^\beta\right) \text{ pour } A \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

et donc

$$R_T(x) = \int_x^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt = \exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right)$$

et on a ensuite

$$\lambda(x) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(x)}{R_T(x)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \text{ pour tout } x \geq 0$$

- (c) **Étudier  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$  en fonction de la valeur de  $\beta$ .**

On a supposé  $\beta \geq 1$  et  $\eta > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{\eta} x^{\beta-1}$$

et celle limite vaut  $\frac{1}{\eta}$  si  $\beta = 1$ , et  $+\infty$  si  $\beta > 1$ .

### 3 Système Poissonien

**On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel  $t$  positif, la variable aléatoire  $N_t$  à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle  $[0, t]$ . On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.**

**On notera en particulier que pour  $s \leq t$ , on a  $N_s \leq N_t$ .**

**On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :**

- $N_0 = 0$  et  $0 < P(N_t = 0) < 1$  pour tout  $t > 0$ .
- Pour tous réels  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tels que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  les variables  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).
- Pour tous réels  $s$  et  $t$  tels que  $0 < s < t$ ,  $N_t - N_s$  suit la même loi que  $N_{t-s}$  (accroissements stationnaires).
- $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(N_h > 1)}{h} = 0$

**On pose, sous réserve d'existence, pour tout  $u \geq 0$  et pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ ,  $G_u(s) = E(s^{N_u})$ , avec la convention  $0^0 = 1$ .**

12. (a) **Justifier que pour tout  $u \geq 0$ ,  $G_u(s)$  existe pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$  et qu'on a, pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ ,**

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k$$

Par théorème de transfert,  $E(s^{N_u})$  existe ssi la série  $\sum_k s^k P(N_u = k)$  converge (absolument, mais c'est de toute façon une SATP).

Or  $0 \leq s \leq 1$ , donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq s^k P(N_u = k) \leq P(N_u = k)$$

et la série de  $\text{tg } P(N_u = k)$  converge (de somme 1).

Par comparaison de SATP on en déduit que  $\sum_k s^k P(N_u = k)$  converge, et on a donc

$$E(s^{N_u}) = G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k P(N_u = k)$$

- (b) **Montrer par ailleurs que, pour tous réels  $u$  et  $v$  positifs ou nuls, et pour tout réel  $s$  tel que  $0 \leq s \leq 1$ , on a :**

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$$

$G_{u+v}(s) = E(s^{N_{u+v}})$ . On remarque alors que  $N_{u+v} = N_u + (N_{u+v} - N_u)$  et que les deux variables  $N_u$  et  $(N_{u+v} - N_u)$  sont indépendantes par la seconde propriété donnée en préambule. Par coalitions, les variables  $s^{N_u}$  et  $s^{(N_{u+v} - N_u)}$  sont également indépendantes, et on peut écrire :

$$E(s^{N_{u+v}}) = E(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}) = E(s^{N_u})E(s^{N_{u+v} - N_u})$$

Enfin par la troisième propriété donnée en préambule,  $N_{u+v} - N_u$  et  $N_v$  suivant la même loi ; donc  $s^{N_{u+v} - N_u}$  et  $s^{N_v}$  également, et donc

$$E(s^{N_{u+v}}) = E(s^{N_u})E(s^{N_v})$$

ce qui donne bien

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$$

- (c) **En déduire :**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \geq 0, G_{nu}(s) = (G_u(s))^n$ .

On procède par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

- Pour  $n = 0$ , on a à démontrer  $\forall u \geq 0, G_0(s) = G_u(s)^0 = 1$  ; or  $G_0(s) = E(s^{N_0}) = E(s^0) = 1$  : la propriété est vraie au rang 0.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé ; on suppose  $G_{nu}(s) = (G_u(s))^n$ . Soit  $u \geq 0$ .  
Alors  $G_{(n+1)u}(s) = G_{nu+u}(s) = G_{nu}(s)G_u(s) = (G_u(s))^n G_u(s) = (G_u(s))^{n+1}$  d'après 12b et l'hypothèse de récurrence ; et on a bien l'hérédité.
- Finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \geq 0, G_{nu}(s) = (G_u(s))^n$ .

13. **On fixe  $s$  tel que  $0 \leq s \leq 1$ .**

- (a) **Montrer que  $G_1(s) > 0$ .**

$G_1(s) = E(s^{N_1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k) s^k = P(N_1 = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_1 = k) s^k$  (y compris pour  $s = 0$  avec  $0^0 = 1$ ) ; or  $P(N_1 = 0) > 0$  par la quatrième propriété donnée ; et les autres termes de la somme sont positifs ( $s \geq 0$ ) ; donc on a bien

$$\forall s \geq 0, G_1(s) > 0$$

**On pose  $\theta(s) = -\ln(G_1(s))$  et, pour  $u \geq 0, \psi(u) = G_u(s)$ .**

- (b) **Montrer que  $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .**

$\psi(k) = G_k(s) = (G_1(s))^k$  d'après 12c ; et avec  $\theta(s) = -\ln(G_1(s))$  on a  $G_1(s) = \exp(-\theta(s))$  ; et donc

$$\psi(k) = (\exp(-\theta(s)))^k = \exp(-k\theta(s))$$

- (c) **Soit  $q$  un entier naturel non nul. En considérant  $G_{1/q}(s)$ , montrer que  $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$ .**

Toujours avec 12c, on remarque que

$$(G_{1/q}(s))^q = G_{q(1/q)}(s) = G_1(s) = \exp(-\theta(s))$$

En prenant la puissance  $1/q$  il vient donc  $G_{1/q}(s) = (\exp(-\theta(s)))^{1/q} = \exp(-\frac{1}{q}\theta(s))$ .

- (d) **Montrer que si  $p$  est un entier naturel, et  $q$  un entier naturel non nul, on a  $\psi(r) = e^{-r\theta(s)}$  où on a posé  $r = \frac{p}{q}$ .**

On combine les propriétés précédentes :

$$\forall p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*, \psi(r) = G_{p/q}(s) = (G_{1/q}(s))^p = \left(\exp(-\frac{1}{q}\theta(s))\right)^p = \exp(-\frac{p}{q}\theta(s)) = \exp(-r\theta(s))$$

**On admet qu'on a en fait : pour tout réel positif  $u$ ,  $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$ .**

(e) **En déduire que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$ .**

Avec ce qui précède :

$$\forall s \in [0, 1], \frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{e^{-h\theta(s)} - 1}{h} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-h\theta(s)}{h} = -\theta(s)$$

d'où la limite recherchée... si  $\theta(s) \neq 0$ .

Mais si  $\theta(s) = 0$  on a  $G_h(s) = e^{-h\theta(s)} = 1$  ; et donc  $\frac{G_h(s) - 1}{h} = 0$  tend bien vers  $0 = -\theta(s)$ .

**14. Montrer par ailleurs que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,**

$$G_h(s) - 1 = P(N_h = 1)(s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1).$$

On a  $G_h(s) - 1 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)s^k\right) - 1$  et on peut ruser en écrivant  $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)$  ; de sorte que

$$G_h(s) - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) = 0 + P(N_h = 1)(s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)$$

en isolant les termes  $k = 0$  (nul) et  $k = 1$ .

Plus directement, on peut partir de l'expression à trouver et reconnaître une espérance :

$$P(N_h = 1)(s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) \underbrace{=}_{\text{E}(s^{N_h} - 1)} E(s^{N_h} - 1) = E(s^{N_h}) - 1 = G_h(s)$$

avec un théorème de transfert pour l'égalité en accolade (NB : le terme  $k = 0$  «manquant» dans la somme donnant l'espérance est nul.)

**15. Montrer que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0$**

On utilise la propriété  $\frac{P(N_h > 1)}{h} \rightarrow 0$  (donnée en préambule).

Pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $-1 \leq s^k - 1 \leq 0$ .

Ceci donne, pour  $h > 0$  :

$$-\frac{P(N_h = k)}{h} \leq \frac{P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \leq 0$$

et en sommant de 2 à  $+\infty$  on voit apparaître  $P(N_h > 1) = \sum_{k \geq 2} P(N_h = k)$  :

$$-\frac{P(N_h > 1)}{h} = -\frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k) \leq \frac{P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \leq 0$$

et par théorème des gendarmes et avec l'hypothèse rappelée on en déduit bien :

$$\forall s \in [0, 1], \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0$$

**16. (a) En déduire qu'il existe  $\alpha \geq 0$  tel que  $\alpha = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(N_h = 1)}{h}$  et que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $\theta(s) = \alpha(1 - s)$ .**

On reprend l'expression trouvée en 14 en divisant par  $h > 0$  :

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{P(N_h = 1)}{h}(s - 1) + \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h}$$

Pour  $h \rightarrow 0^+$  :

- $\frac{G_h(s) - 1}{h} \rightarrow -\theta(s)$  (question 13e)
- $\frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \rightarrow 0$  (question 15)

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(N_h = 1)}{h} (s - 1) = -\theta(s)$$

ce qui s'écrit aussi, pour  $s \neq 1$  :  $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{P(N_h = 1)}{h} = -\frac{\theta(s)}{s - 1}$ . Cette dernière limite est en fait indépendante de  $s$  (l'expression de gauche ne faisant pas intervenir  $s$ ) : notons-la  $\alpha$ .

On obtient alors : pour tout  $s \in [0, 1[$ ,  $\theta(s) = \alpha(1 - s)$ .

Pour étendre à  $s = 1$  il faudrait avoir  $\theta(1) = 0$ .

or en revenant à la définition :  $\theta(1) = -\ln(G_1(1)) = -\ln(E(1^{N_1})) = -\ln(1) = 0$  ; et donc la formule trouvée est en fait valable pour tout  $s$  de  $[0, 1]$ .

(b) **En considérant  $G_u(0)$ , montrer que  $\alpha > 0$ .**

$$G_u(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) 0^k = P(N_u = 0) \text{ d'après 12a avec la convention } 0^0 = 1.$$

Par hypothèse faite en début de partie,  $0 < P(N_u = 0) < 1$  donc  $0 < G_u(0) < 1$ .

On a aussi  $G_u(0) = e^{-u\theta(0)} < 1$  d'après le résultat admis dans la question 13, donc  $-u\theta(0) < 0$  (avec  $u > 0$  quelconque), donc  $\theta(0) > 0$ . On a enfin  $\alpha = \theta(0)$  d'après 16a : d'où  $\alpha > 0$ .

17. **On fixe un temps  $u > 0$ . Montrer que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,**

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right) s^k.$$

On récapitule : d'après la question 13,  $G_u(s) = e^{-u\theta(s)} = e^{-\alpha u(1-s)}$  en utilisant 16a.

On a alors

$$G_u(s) = e^{-\alpha u} e^{\alpha u s} = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k u^k s^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right) s^k$$

**Ce résultat permet de montrer que : pour tout  $u > 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(N_u = k) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$  : autrement dit, la variable aléatoire  $N_u$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\alpha u$ .**

**Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson et la constante  $\alpha$  s'appelle le paramètre du processus de Poisson.**

18. **Soit  $T$  la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit  $t > 0$ . Comparer les événements  $(T > t)$  et  $(N_t = 0)$ . En déduire que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .**

$(T > t)$  est réalisé ssi la première panne survient à un temps  $> t$  ; donc ssi au temps  $t$  il n'y a encore eu aucune panne ; donc ssi  $N_t = 0$ . On a donc  $P(T > t) = P(N_t = 0)$  ; et d'après ce qui précède,  $N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha t)$ , d'où on tire  $P(N_t = 0) = e^{-\alpha t}$ .

On a donc montré :  $\forall t > 0$ ,  $P(T > t) = e^{-\alpha t}$  ; donc

$$\forall t > 0, P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

et pour  $t \leq 0$ ,  $P(T \leq t) = 0$  car  $t$  est à valeurs  $> 0$ .

Ainsi,

$$T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$$

19. **Pour  $t$  positif fixé, on pose pour  $h$  réel positif,  $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ .**

$N_{t+h} - N_t$  est la différence entre le nombre de pannes survenues avant  $t$ , et le nombre de pannes survenues avant  $t + h$  ; c'est donc le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps  $]t, t + h]$ .

(a) **Montrer que  $\tilde{N}_h$  est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps  $]t, t + h]$ .**

- (b) **Montrer que la famille  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\alpha$ .**

D'après les propriétés des  $N_t$ ,  $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$  suit la même loi que  $N_h$  ; on a donc les propriétés 1 et 4 du début de partie.

On remarque ensuite que

$$\tilde{N}_h - \tilde{N}_k = N_{t+h} - N_t - (N_{t+k} - N_t) = N_{t+h} - N_{t+k}$$

$\tilde{N}_h - \tilde{N}_k$  suit donc la même loi que  $N_{t+h-(t+k)} = N_{h-k}$  qui suit encore la même loi que  $\tilde{N}_{h-k}$  : on a montré la propriété 3 ;

Enfin,  $\tilde{N}_h - \tilde{N}_k = N_{t+h} - N_{t+k}$ , ce qui montre que si les  $N_t$  vérifient la propriété 2, les  $\tilde{N}_h$  le vérifient également.

$(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est donc bien un processus de Poisson.

Le paramètre s'obtient en observant la loi de  $\tilde{N}_1$ , qui est celle de  $N_1$  : le paramètre est donc le même, à savoir  $\alpha$ .

- (c) **En déduire que la première panne survenant après la date  $t$  se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .**

Si on fixe l'origine des temps à la date  $t$ , le processus de Poisson permettant de mesurer l'instant de la première panne est  $(\tilde{N}_h)$ .

En reprenant la démarche de la question 18 :  $\tilde{N}_h$  est le nombre de pannes entre  $t$  et  $t+h$  ; donc la première panne après  $t$  arrive après  $t+h$  ssi  $\tilde{N}_h = 0$ .

D'où, en notant  $T$  la date de la première panne après  $t$  (mais en prenant pour origine  $t$  ; donc si la première panne après  $t$  arrive à  $t+1$  on aura en fait  $T = 1$ ... énoncé trop flou sur ce point) :

$$P(\tilde{N}_h = 0) = P(T > h)$$

et comme en question 18, on trouve

$$T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$$

- (d) **En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date  $t$  donnée, le taux de défaillance du système après  $t$  est constant.**

À chaque  $t$  donné, la durée avant la prochaine panne suit  $\mathcal{E}(\alpha)$  ; donc on a un taux de défaillance  $\alpha$  d'après la question 9a.

Le taux de défaillance est donc bien constant.