

Concours Blanc n°2 – Maths 2 Sujet EML-EDHEC-ECRICOME

9/03/2023

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans toutes les questions d'informatique, on supposera que les packages Python utiles ont été importés de manière usuelle :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

On admet le théorème suivant :

Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right) = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n < 1$.
(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Dédire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
- Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.
 - Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n v_n} = \frac{1}{2}$; puis en déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- (a) Pour tout entier naturel n , exprimer $v_n - v_{n+1}$ en fonction de v_n .
(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
(c) Montrer que la série de terme général v_n^2 converge, et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.
- (a) Écrire une fonction Python `terme(n)` qui renvoie la valeur de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
(b) Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la première valeur de n telle que $1 - u_n < 10^{-3}$.

```
u = .....
while .....
    .....
print(u)
```

Exercice 2 : Probas discrètes

On dispose de trois pièces :

- une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir « Face » vaut également $\frac{1}{2}$;
- une pièce numérotée 1, donnant « Pile » à coup sûr ;
- et une troisième pièce, numérotée 2, donnant « Face » à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i » .

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient « Pile » au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier « Pile » et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier « Face » .

On convient de que X vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Pile » , et que Y vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Face » .

1. (a) Calculer les probabilités $P_{A_i}(X = 1)$ pour $i = 0, 1, 2$ (on justifiera ses réponses !) En déduire la valeur de $P(X = 1)$.
(b) Montrer que : $\forall n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X .
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
(a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
(b) Justifier que $(X = 0) \cap (Y = 1) = (X = 0)$.
(c) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
(d) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

On pourra introduire le système complet d'événements associé au premier lancer de pièce.

- (e) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m , l'instruction `np.randint(0, m+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder « Pile » par 1 et « Face » par 0 .

- (a) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```

piece = rd.randint(...)
x = 1

if piece == 0 :
    lancer = rd.randint(...)
    while lancer == 0 :
        lancer = .....
        x = .....
else
    if piece == 2 :
        x = .....

print(x)

```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3 : Probas à densité

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

- Démontrer que la fonction f est paire.
- Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.
- À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du.$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.
 - Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
- On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X .
 - Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
 - La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
- Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
 - Donner la fonction de répartition de Y , et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.

Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

- (a) Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.
(b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.
(c) Montrer que pour tout réel x , on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} P(Y \leq x) + \frac{1}{2} P(Y \geq -x)$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et V la variable aléatoire définie par $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

- (a) Rappeler la fonction de répartition de U.
(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables V et Y suivent la même loi.
3. (a) Écrire une fonction `tirageD(n)` en langage Python, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie un `np.array` contenant n réalisations de la variable aléatoire D.
(b) On considère la fonction suivante :

```
def mystere(n):  
    a = tirageD(n)  
    b = rd.random(n)  
    c = a/np.sqrt(1-b)  
    return sum(c)/n
```

De quelle variable aléatoire les coefficients de c sont-ils une simulation ? Pour n assez grand, que dire de la valeur renvoyée par cette fonction ? Justifier votre réponse.