

Concours Blanc n°2 – Maths 2 Sujet EML-EDHEC-ECRICOME

9/03/2023

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans toutes les questions d'informatique, on supposera que les packages Python utiles ont été importés de manière usuelle :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1

On admet le théorème suivant :

Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right) = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) **Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n < 1$.**

Récurrence sans difficulté particulière.

- (b) **Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0 \text{ (un carré étant positif).}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

- (c) **Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.**

(u_n) est croissante et majorée par 1 d'après les deux questions précédentes, donc converge vers $\ell \in [0, 1]$.

$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ étant continue sur \mathbb{R} , le théorème du point fixe donne $\ell = \frac{1+\ell^2}{2}$, ce qui fournit $\ell = 1$.

2. **Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.**

- (a) **Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.**

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1+u_n^2}{2} = \frac{1-u_n^2}{2}; \text{ par suite}$$

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2-(1+u_n)}{1-u_n^2} = \frac{1}{1+u_n}$$

$$\text{et avec } u_n \rightarrow 1 \text{ on a } \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

- (b) **Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$; puis en déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.**

On applique le théorème admis à la suite $a_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$, qui tend vers $\ell = \frac{1}{2}$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) = \frac{1}{2}$ et on remarque une somme télescopique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{nv_n} - \frac{1}{nv_0} \right) = \frac{1}{2}$$

et comme $\frac{1}{nv_0} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ on en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$$

Comme $\frac{1}{2} \neq 0$ ceci peut se réécrire $\frac{1}{nv_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$; soit encore $\frac{1}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ puis

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

par règles usuelles sur les équivalents.

3. (a) **Pour tout entier naturel n , exprimer $v_n - v_{n+1}$ en fonction de v_n .**

Avec $v_{n+1} = \frac{1 - u_n^2}{2}$ et un peu de manipulations on obtient

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2} = \frac{v_n^2}{2}$$

- (b) **Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.**

Télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$$

- (c) **Montrer que la série de terme général v_n^2 converge, et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k^2}{2} = v_0 - v_n \rightarrow v_0$$

car $u_n \rightarrow 1$ donc $v_n = 1 - u_n \rightarrow 0$.

Ainsi pour $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 \right) = 1$$

donc la série des v_k^2 converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2 = 2$$

(NB : pour la convergence on pouvait aussi remarquer que $v_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$ et conclure par comparaison à une série de Riemann convergente... mais ceci ne donne pas la valeur de la somme !)

4. (a) **Écrire une fonction Python `terme(n)` qui renvoie la valeur de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.**
Classique...

```
def terme(n):
    u=0 # u0
    for k in range(n):
        u=(1+u**2)/2
    return u
```

- (b) Compléter le script suivant pour qu'il renvoie la première valeur de n telle que $1 - u_n < 10^{-3}$.
code incorrect, désolé... on demande de renvoyer n et non u_n !

```
n = 0
u = 0 # u0
while 1-u >= 10**(-3):
    u=(1+u**2)/2
    n = n+1
print(n)
```

NB : il est très malhabile de faire la chose suivante :

```
n = 0
while 1-terme(n) >= 10**(-3):
    n = n+1
print(n)
```

car on recalcule tous les termes de la suite à chaque fois !!

Exercice 2 : Probas discrètes

On dispose de trois pièces :

- une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir « Face » vaut également $\frac{1}{2}$;
- une pièce numérotée 1, donnant « Pile » à coup sûr ;
- et une troisième pièce, numérotée 2, donnant « Face » à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i » .

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient « Pile » au lancer numéro k » et on pose $F_k = \bar{P}_k$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier « Pile » et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier « Face » .

On convient de que X vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Pile » , et que Y vaut 0 si l'on n'obtient jamais « Face » .

- (a) Calculer les probabilités $P_{A_i}(X = 1)$ pour $i = 0, 1, 2$ (on justifiera ses réponses !)

En déduire la valeur de $P(X = 1)$.

$P_{A_0}(X = 1)$ est la proba d'avoir Pile au premier lancer sachant qu'on lance la pièce 0, qui est équilibrée :

$$P_{A_0}(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$P_{A_1}(X = 1)$ est la proba d'avoir Pile au premier lancer sachant qu'on lance la pièce 1, qui tombe toujours sur Pile :

$$P_{A_1}(X = 1) = 1$$

$P_{A_2}(X = 1)$ est la proba d'avoir Pile au premier lancer sachant qu'on lance la pièce 2, qui tombe toujours sur Face :

$$P_{A_2}(X = 1) = 0$$

On applique ensuite la formule des probabilités totales avec le système complet (A_0, A_1, A_2) :

$$P(X = 1) = P_{A_0}(X = 1)P(A_0) + P_{A_1}(X = 1)P(A_1) + P_{A_2}(X = 1)P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

les $P(A_i)$ valant $\frac{1}{3}$ par équiprobabilité du choix de la pièce.

(b) **Montrer que :** $\forall n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

L'événement $(X = n)$ est : le premier Pile arrive au rang n . Avec les caractéristiques des pièces :

$$P_{A_0}(X = n) = P_{A_0}(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

car les lancers successifs sont indépendants et renvoient Pile ou Face de manière équiprobable. Si on choisit la pièce 1, on a forcément le premier Pile au rang 1, donc $X = 1$:

$$\forall n \geq 2, P_{A_1}(X = n) = 0$$

Si on choisit la pièce 2, on n'a jamais Pile, donc $X = 0$:

$$\forall n \geq 2, P_{A_2}(X = n) = 0$$

Encore par probas totales avec (A_0, A_1, A_2) :

$$P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(c) **En déduire la valeur de $P(X = 0)$.**

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ donc } P(X = 0) + P(X = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1 : \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{(1/2)^2}{1 - 1/2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ P(X = 0) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(NB : pas idiot, c'est la proba de tirer la pièce qui ne renvoie jamais Pile...)

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .

On examine la convergence absolue de la série de terme général $nP(X = n)$, qui vaut pour $n \geq 2$:

$$nP(X = n) = n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$: il y a bien convergence absolue, X admet une espérance.

On calcule ensuite :

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Avec

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 = \frac{1}{(1 - 1/2)^2} - 1 = 3$$

on obtient $E(X) = 1$.

3. **Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que**

$$V(X) = \frac{4}{3}.$$

Par théorème de transfert, $E(X(X-1))$ existe ssi $\sum n(n-1)P(X=n)$ cv absolument.

Pour $n \geq 2$, $n(n-1)P(X=n) = \frac{1}{12}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et on a cette fois une série géométrique dérivée seconde, convergente.

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{12}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{12} \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{4}{3}$$

(les termes $n=0$, $n=1$ sont nuls).

$X^2 = X(X-1) + X$ admet donc une espérance ; donc X admet une variance.

On trouve $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{7}{3}$; puis $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4}{3}$.

4. **Justifier que Y suit la même loi que X .**

Les rôles de Pile et Face sont interchangeables dans cette expérience ; donc X et Y suivant la même loi.

5. (a) **Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j])$.**

Soit $j \geq 2$. $(X=1 \cap Y=j)$ est l'événement : « le premier Pile arrive au rang 1, et le premier Face au rang j » (avec $j \geq 2$).

On voit que si $(Y=j)$ alors on a forcément $(X=1)$.

On a donc $(X=1) \cap (Y=j) = (Y=j)$, d'où l'égalité de leurs probas.

- (b) **Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i])$.**

C'est identique en échangeant Pile et Face.

6. **Loi de $X+Y$.**

- (a) **Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.**

$X+Y=0$ ssi $X=Y=0$ (X et Y sont positives) ; ce qui arrive si on n'a jamais Pile et jamais Face... pas possible.

$X+Y=2$ ssi :

- $X=0$ et $Y=2$: jamais Pile, et premier face au rang 2 : impossible.
- ou $X=2$ et $Y=0$: impossible pour les mêmes raisons.
- ou $X=1$ et $Y=1$: le premier Pile et le premier face arrivent au rang 1 : impossible.

0 et 2 sont donc des valeurs impossibles. justifions que les autres sont possibles.

- $X+Y=1$ est atteint lorsque $X=0$ et $Y=1$: premier Face au rang 1, et jamais de Pile : c'est possible si on obtient une suite infinie de « Face »
- si $j \geq 3$, $X+Y=j$ est atteint lorsque $X=1$ et $Y=j-1$: premier Pile au rang 1, et premier Face au rang $j-1$ ($j-1 \geq 2$). Ceci est possible ; c'est d'ailleurs l'événement $Y=j-1$.

$X+Y$ prend donc n'importe quelle valeur de \mathbb{N} sauf 0 et 2.

- (b) **Justifier que $(X=0) \cap (Y=1) = (X=0)$.** $(X=0) \cap (Y=1)$ est l'événement : on n'a jamais Pile, et le 1er face au 1er lancer ; ce qui équivaut à n'avoir jamais Pile.

On a donc bien $(X=0) \cap (Y=1) = (X=0)$.

- (c) **Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.**

Par union incompatible : $P(X+Y=1) = P((X=0) \cap (Y=1)) + P((X=1) \cap (Y=0)) = P(X=0) + P(Y=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

(on a $(X=1) \cap (Y=0) = (Y=0)$ par le même raisonnement que la question précédente ; et X et Y suivant la même loi).

- (d) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

On pourra introduire le système complet d'événements associé au premier lancer de pièce.

Le SCE spécifié est $(X = 1), (Y = 1)$. Alors :

$$(X + Y = n) = ((X + Y = n) \cap (X = 1)) \cup ((X + Y = n) \cap (Y = 1))$$

et il est relativement clair que $(X + Y = n) \cap (X = 1) = (X = 1) \cap (Y = n - 1)$, et $(X + Y = n) \cap (Y = 1) = (X = n - 1) \cap (Y = 1)$.

Ceci fournit le résultat.

- (e) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Comme $n \geq 3$, $n - 1 \geq 2$ et l'union de la question précédente est disjointe : donc

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= P((X + Y = n) \cap (X = 1)) + P((X + Y = n) \cap (Y = 1)) \\ &= P((X = 1) \cap (Y = n - 1)) + P((X = n - 1) \cap (Y = 1)) \\ &= P(Y = n - 1) + P(X = n - 1) \text{ avec 5a et 5b, } n - 1 \geq 2 \\ &= 2 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ P(X + Y = n) &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m , l'instruction `np.randint(0, m+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder « Pile » par 1 et « Face » par 0.

- (a) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```

piece = rd.randint(0,3) # renvoie 0,1, ou 2 équiprobable
x = 1

if piece == 0 : # pièce équilibrée
    lancer = rd.randint(0,2) # renvoie 0 ou 1 équiprobable
    while lancer == 0 : # si face
        lancer = rd.randint(0,2) # on relance
        x = x+1 # et on incrémente le compteur de lancers
else
    if piece == 2 : # on n'aura jamais Pile !
        x = 0

print(x)

```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Si on tire la pièce 1, on aura le premier Pile au rang 1, donc $X = 1$ ce qui est la valeur à laquelle on initialise la variable x : il est inutile de la modifier dans la suite du programme !

Exercice 3 : Probas à densité

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. **Démontrer que la fonction f est paire.**

f est définie sur \mathbb{R} centré en 0.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en remplaçant t par $-t$ dans l'accolade :

$$f(-t) = \begin{cases} \frac{1}{(-t)^3} & \text{si } -t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < -t < 1 \\ -\frac{1}{(-t)^3} & \text{si } -t \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = f(t)$$

et on a bien la parité.

2. **Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.**

$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ (expression de f sur $[1, +\infty[$) converge (intégrale de Riemann).

Soit $A \geq 1$:

$$\int_1^A f(t) dt = \int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

3. (a) **À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on**

a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du.$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.

Conséquence classique de la parité... On pose $u = -t$:

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_A^1 \underbrace{f(-u)}_{=f(u)} (-du) = - \int_A^1 f(u) du = \int_1^A f(u) du$$

En faisant $A \rightarrow +\infty$, on obtient la convergence de $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ et

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(u) du = \frac{1}{2}$$

(b) **Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.**

i. f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en -1 et 1 .

ii. si $t < -1$, $-\frac{1}{t^3} > 0$ et si $t > 1$, $\frac{1}{t^3} > 0$ donc f est positive sur \mathbb{R} .

iii.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2} + \int_{-1}^1 0 dt + \frac{1}{2} = 1$$

Ces trois points assurent que f est une densité de probabilité.

4. **On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X .**

(a) **Montrer que, pour tout réel x , on a :**

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x \leq -1 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x -\frac{1}{t^3} dt.$$

Soit $A \leq -1$:

$$\int_A^x -\frac{1}{t^3} dt = \left[\frac{1}{2t^2} \right]_A^x = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2} \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{Donc : } \forall x \leq -1, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{2x^2}. \text{ Notamment, } F(-1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pour } x \in [-1, 1], F_X(x) = F_X(-1) + \int_{-1}^x f(t) dt = \frac{1}{2} + \int_{-1}^x 0 dt = \frac{1}{2}. \text{ Notamment, } F(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pour } x \geq 1, F_X(x) = F_X(1) + \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{2x^2}.$$

(b) **Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.**

X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ converge.

$\int_1^{+\infty} |xf(x)| dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge comme intégrale de Riemann. Par parité de $x \mapsto |xf(x)|$ on en déduit aussi la convergence de $\int_{-\infty}^{-1} |xf(x)| dx$ et donc de $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ (la fonction à intégrer étant continue sur \mathbb{R}).

Un changement de variable $t = -x$, et la parité de f , donnent alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = -E(X)$$

et donc $E(X) = 0$.

(c) **La variable aléatoire X admet-elle une variance ?**

Si X admettait une variance, elle admettrait aussi une espérance, ce qui n'est pas le cas. X n'admet donc pas de variance.

5. **Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.**

(a) **Donner la fonction de répartition de Y , et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.**

Y étant une valeur absolue, $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui montre que : $\forall x < 0, F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$.

Soit maintenant $x \geq 0$. On a

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x)$$

- si $0 \leq x < 1$, on a x et $-x$ dans $] -1, 1[$, et $F_Y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
- si $x \geq 1$, on a $x \geq 1$ et $-x \leq -1$, d'où :

$$F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Finalement :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) **Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :**

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On observe que F_Y est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et continue sur \mathbb{R} (étude des limites en 1^+ et 1^-) : Y est bien à densité. $\forall x \neq 1$, $F'_Y(x) = f_Y(x)$ donc f_Y est bien une densité de Y (la valeur en 1 n'a pas d'importance).

(c) **Montrer que Y admet une espérance et la calculer.**

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ est une intégrale absolument convergente, donc Y admet une espérance. On trouve

$$E(Y) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

Partie B

1. **Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y .**

Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) **Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D .**

D vaut -1 ou 1 de manière équiprobable, donc $Z = \frac{D+1}{2}$ vaut 0 ou 1 de manière équiprobable. Autrement dit : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

D'après le cours $E(Z) = \frac{1}{2}$ et $V(Z) = \frac{1}{4}$.

Comme $D = 2Z - 1$, les propriétés de l'espérance et de la variance donnent $E(D) = 2E(Z) - 1 = 0$ et $V(D) = 4V(Z) = 1$.

(b) **Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.**

D et Y étant indépendantes, et admettant des espérances, on a l'existence de $E(T)$, et $E(T) = E(DY) = E(D)E(Y) = 0$.

(c) **Montrer que pour tout réel x , on a :**

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} P(Y \leq x) + \frac{1}{2} P(Y \geq -x)$$

Comme D vaut $\pm Y$ de manière équiprobable, T vaut $\pm Y$ de manière équiprobable. On sent venir une FPT, avec le système $((D = -1), (D = 1))$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P(DY \leq x) = P((DY \leq x) \cap (D = -1)) + P((DY \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P((-Y \leq x) \cap (D = -1)) + P((Y \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P(-Y \leq x)P(D = -1) + P(Y \leq x)P(D = 1) \quad \text{indép de } D \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{2}P(-Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geq -x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x) \end{aligned}$$

(d) **En déduire la fonction de répartition de T .**

On rappelle la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \frac{1}{2} P(Y \leq x) + \frac{1}{2} P(Y \geq -x) = \frac{1}{2} F_Y(x) + \frac{1}{2} (1 - F_Y(-x))$$

La discussion est assez longue :

- si $x \leq -1$, $-x \geq 1$ et

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(-x)^2} \right) \right) = \frac{1}{2x^2}$$

- si $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ et

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

- si $0 \leq x \leq 1$, on a $-1 \leq x \leq 0$ et

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

- si $x \geq 1$, $-x \leq -1$ et

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2} (1 - 0) = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

On retrouve la fonction de répartition de X!

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et V la variable aléatoire définie par

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}.$$

- (a) Rappeler la fonction de répartition de U.

Cours :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables V et Y suivent la même loi.

On observe que V est bien définie car $1 - U > 0$ avec probabilité 1 ; et à valeurs strictement positives.

Ainsi pour tout réel $x \leq 0$, $F_V(x) = 0$.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) = P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= P\left(1 - U \geq \frac{1}{x^2}\right) \\ &= P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Si $0 < x < 1$, $1 - \frac{1}{x^2} < 0$ et

$$P(V \leq x) = F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Si $x \geq 1$, $1 - \frac{1}{x^2} \in [0, 1[$ et

$$P(V \leq x) = F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Finalement :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et on retrouve bien la fonction de répartition de Y.

3. (a) Écrire une fonction `tirageD(n)` en langage Python, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie un np.array contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

Plusieurs solutions : on peut créer terme à terme une liste contenant des 1 ou des -1 de manière équiprobable :

```
def tirageD(n):
    L=[]
    for k in range(n):
        if rd.random() < 1/2:
            L.append(1)
        else:
            L.append(-1)
    return np.array(L)
```

ou alors utiliser $D = 2Z - 1$ où Z vaut 0 ou 1 de manière équiprobable (donc Bernoulli...)

```
def tirageD(n):  
    Z=rd.randint(0,2,n)  
    return 2*Z-1
```

(b) On considère la fonction suivante :

```
def mystere(n):  
    a = tirageD(n)  
    b = rd.random(n)  
    c = a/np.sqrt(1-b)  
    return sum(c)/n
```

De quelle variable aléatoire les coefficients de c sont-ils une simulation ? Pour n assez grand, que dire de la valeur renvoyée par cette fonction ? Justifier votre réponse.

a est une liste de tirages de D ; b une liste de tirages de U , donc c est une liste de tirages de $D \times \frac{1}{\sqrt{1-U}} = DV$.

Mais V suit la même loi que Y ; donc on obtient en fait des tirages de $DY = T$.

La dernière ligne renvoie la moyenne des composantes de c , qui, d'après la loi faible des grands nombres, fournit une approximation de $E(T)$: ce nombre sera très proche de 0.