

Concours Blanc n°2 – Maths 2  
ESSEC 2014  
Corrigé  
9/03/2023  
Durée : 4h

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Dans tout le sujet,  $I = ]a, b[$  est un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , où  $a$  et  $b$  sont réels ou infinis. On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque  $f$  est :

- continue sur  $I$  ;
- strictement positive sur  $I$  ;
- nulle en dehors de  $I$ .

On écrira alors simplement :  $f$  est CSP(I).

On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

## Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- $X$  une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans  $I$ , de fonction de répartition  $F$  et admettant une densité de probabilité  $f$  qui est CSP(I).
- $U$  une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur  $]0, 1[$  et qui est indépendante de  $X$ .
- $h$  une fonction continue sur  $I$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .

On se propose d'établir la formule suivante :

$$P([U \leq h(X)]) = P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t) dt$$

On définit sur  $I$  la fonction  $\Psi$  par :  $\Psi(x) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$

1. Pour tous réels  $x$  et  $y$  dans  $I$  réels que  $x < y$ , on pose  $M(x, y) = \max_{t \in [x, y]} h(t)$  et  $m(x, y) = \min_{t \in [x, y]} h(t)$ .

- (a) Soit  $x$  dans  $I$ . Justifier que pour tout  $y$  dans l'intervalle  $]x, b[$ , il existe  $\alpha_y$  dans l'intervalle  $[x, y]$  tel que  $M(x, y) = h(\alpha_y)$ .

$h$  est continue sur  $I$ , donc pour tout  $y \in ]x, b[$ ,  $h$  est continue sur le segment  $[x, y]$  ; elle est donc bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Notamment, il existe  $\alpha_y$  dans l'intervalle  $[x, y]$  tel que  $h(\alpha_y) = \max_{t \in [x, y]} h(t) = M(x, y)$ .

- (b) En déduire :  $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)$ .

Faisons tendre  $y$  vers  $x$  par valeurs supérieures. Comme  $x \leq \alpha_y \leq y$ , on a alors  $\alpha_y \rightarrow x$  par gen-darmes, et donc  $M(x, y) = h(\alpha_y) \rightarrow h(x)$  par continuité de  $h$  en  $x$ .

- (c) Montrer de même que, pour tout  $y$  dans  $I$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)$ .

De même, si  $y$  tend vers  $x$  par valeurs inférieures, on a  $\alpha_y \rightarrow y$ , et  $M(x, y) = h(\alpha_y) \rightarrow h(y)$  par conti-nuité de  $h$  en  $y$ .

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :  $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} m(x, y) = h(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} m(x, y) = h(y)$ .

2. Soit  $x$  et  $y$  deux réels de  $I$  tels que  $x < y$ .

(a) Établir l'inclusion suivante entre événements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

Supposons que  $x < X \leq y$ , et que  $U \leq h(X)$  ; on a alors évidemment  $x < X \leq y$ , et comme  $X \in ]x, y[ \subset [x, y]$  on a  $h(X) \leq \sup_{[x, y]} h(t) = M(x, y)$  ; et par suite  $U \leq M(x, y)$ . On a donc bien l'inclusion entre événements demandée.

Cette inclusion implique l'inégalité entre probabilités :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) \leq P([x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)])$$

Par indépendance de  $X$  et  $U$  le terme de droite devient :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]) = P([x < X \leq y]) \times P([U \leq M(x, y)])$$

Par définition de  $F$ , on a :  $P([x < X \leq y]) = F(y) - F(x)$  ; et comme  $h$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  on a  $M(x, y) \in [0, 1]$  ; et comme  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$  on peut conclure que  $P([U \leq M(x, y)]) = M(x, y)$ .

Ainsi :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]) = (F(y) - F(x))M(x, y)$$

Pour le terme de gauche *on ne peut pas utiliser l'indépendance* car l'événement  $(U \leq h(X))$  dépend de  $U$  et de  $X$  !!

Il faut raisonner au niveau des événements : on a l'union disjointe :

$$[X \leq y] \cap [U \leq h(X)] = [X \leq x] \cap [U \leq h(X)] \sqcup [x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)]$$

ce qui donne

$$P([X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) + P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)])$$

et donc

$$\Psi(y) = \Psi(x) + P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)])$$

et le terme de gauche vaut bien  $\Psi(y) - \Psi(x)$ .

On a donc bien

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

(b) Établir une minoration analogue pour  $\Psi(y) - \Psi(x)$ , puis l'encadrement

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)$$

On montre cette fois l'inclusion

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \supset [x < X \leq y] \cap [U \leq m(x, y)]$$

C'est essentiellement le même raisonnement ; avec cette fois que si  $x < X \leq y$ , on a  $h(X) \geq m(x, y)$  et donc  $U \leq m(x, y) \Rightarrow U \leq h(X)$ .

Au niveau des probas :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) \geq P([x < X \leq y] \cap [U \leq m(x, y)])$$

et par les mêmes opérations ceci devient :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \geq (F(y) - F(x))m(x, y)$$

En divisant par  $y - x > 0$ , on obtient bien l'encadrement demandé.

(c) **Montrer que  $\Psi$  est dérivable sur  $I$ , et exprimer sa dérivée en fonction de  $f$  et  $h$ .**

Pour  $y \rightarrow x$  par valeurs supérieures :  $m(x, y) \rightarrow h(x)$ ,  $M(x, y) \rightarrow h(x)$  ; et  $\frac{F(y) - F(x)}{y - x} \rightarrow F'(x) = f(x)$  car  $f$  est continue en  $x$ .

Dans l'encadrement précédent, cette limite fournit par théorème des gendarmes :

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x)h(x)$$

et on en déduit que  $\Psi$  est dérivable en  $x$ , de nombre dérivé  $f(x)h(x)$ .

Ceci valant pour tout  $x$  de  $I$ , on a montré que  $\Psi$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée  $\Psi' = hf$ .

3. (a) **En déduire que, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $I$  :**

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t) dt$$

C'est immédiat car  $\Psi$  est une primitive de  $hf$  d'après la question précédente.

(b) **Établir : pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $\Psi(x) \leq F(x)$ , puis montrer :  $\lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = 0$ . En déduire :**

$$\forall x \in I \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t) dt$$

Par définition,  $\Psi(x) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$ . Or on a l'inclusion entre événements :

$$[X \leq x] \cap [U \leq h(X)] \subset [X \leq x]$$

donc  $P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) \leq P([X \leq x])$  ce qui donne bien

$$\Psi(x) \leq F(x)$$

$\Psi(x)$  étant une probabilité, on a clairement  $\Psi(x) \geq 0$  ; on peut alors essayer d'utiliser un théorème des gendarmes en utilisant l'inégalité qui vient d'être démontrée.

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt$  car  $f$  est nulle hors de  $]a, b[$ .

Cette dernière intégrale est convergente en  $a$  ; on a alors  $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x f(t) dt = 0$  ; d'où  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ . Le théorème des gendarmes fournit alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = 0$$

(c) **Établir : pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = P([U \leq h(X)]) - \Psi(x)$ .**

**En déduire :  $\lim_{x \rightarrow b} \Psi(x) = P([U \leq h(X)])$  puis**

$$P([U \leq h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t) dt$$

On utilise les probas totales avec le SCE  $([X \leq x], [X > x])$  :

$$P([U \leq h(X)]) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) + P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = \Psi(x) + P([X > x] \cap [U \leq h(X)])$$

ce qui donne bien  $P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = P([U \leq h(X)]) - \Psi(x)$ .

Pour  $x \rightarrow b$  :  $P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) \leq P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \rightarrow 0$ , et en minorant par 0, on a bien

$$\lim_{x \rightarrow b} P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = 0$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow b} \Psi(x) = P([U \leq h(X)])$ .

4. **Montrer que**  $P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leq 1 - h(X)])$ , **en déduire :**

$$P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t) dt$$

Par passage à l'événement contraire :

$$P([U < h(X)]) = 1 - P([U \geq h(X)]) = 1 - P([1 - U \leq 1 - h(X)])$$

Posons alors :

- $V = 1 - U$  : il est relativement clair que  $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$  ; de plus  $V$  et  $X$  sont indépendantes.
- $h_1(x) = 1 - h(x)$  :  $h_1$  est continue sur  $I$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ .

Ce qui précède s'applique alors à  $V$  et  $h_1$  : on trouve

$$\begin{aligned} P([1 - U \leq h_1(X)]) &= \int_a^b f(t)h_1(t) dt \\ &= \int_a^b f(t)(1 - h(t)) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(t)h(t) dt \\ &= 1 - \int_a^b f(t)h(t) dt \end{aligned}$$

et on trouve

$$P(U < h(X)) = 1 - P(1 - U \leq h_1(x)) = \int_a^b f(t)h(t) dt$$

## Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ .

On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . On suppose que :

- pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut  $\alpha$  unités du secteur 1 et  $\alpha$  unités du secteur 2.
- pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut  $\beta$  unités du secteur 1 et  $\alpha$  unités du secteur 3.
- pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut  $\beta$  unités du secteur 2 et  $\beta$  unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  des secteurs respectifs  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. (a) **Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ , tels que**

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

Pour  $i = 1, 2, 3$ , notons  $x_i$  la production du secteur  $i$  (en nombre d'unités).

Le secteur 1 produit  $x_1$  unités ; et le nombre d'unités du secteur 1 consommées est  $\alpha x_1$  (consommées par le secteur 1),  $+\beta x_2$  (consommées par le secteur 2 pour produire  $x_2$  unités).

Le secteur 1 est donc excédentaire ssi  $x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2$ .

Analysons maintenant le secteur 2 : il produit  $x_2$  unités, et le système global consomme  $\alpha x_1$  unités du secteur 2 (pour la production de  $x_1$  unités),  $+\beta x_3$ .

Le secteur 2 est donc excédentaire ssi  $x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3$ .

De même l'analyse du secteur 3 fournit la troisième contrainte.

Le modèle est viable s'il existe une configuration pour lequel tous les secteurs sont excédentaires ; autrement dit s'il existe  $x_1, x_2, x_3$  (quantités produites par les secteurs 1,2,3) vérifiant les conditions données.

- (b) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ . Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il

existe une matrice colonne  $X$  à composantes strictement positives telle que la matrice colonne  $X - AX$  n'a que des composantes strictement positives.

On peut réécrire ces conditions sous la forme :

$$\begin{cases} (1 - \alpha)x_1 - \beta x_2 > 0 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \beta x_3 > 0 \\ -\alpha x_2 + (1 - \beta)x_3 > 0 \end{cases}$$

Le modèle est donc viable s'il existe  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  à composantes  $> 0$  telles que  $\begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & 1 & -\beta \\ 0 & -\alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \times X$  soit à valeurs  $> 0$ .

La matrice apparaissant ici est  $\begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & 1 & -\beta \\ 0 & -\alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} = I_3 - A$ , et on obtient :

Le modèle est viable s'il existe  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  à composantes  $> 0$  telles que  $(I_3 - A)X = X - AX$  est à composantes  $> 0$ .

6. (a) **Vérifier que  $\alpha + \beta$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace vectoriel associé.**

Une observation relativement usuelle montre que  $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  on a bien que  $\alpha + \beta$  est une vap de  $A$ .

Pour déterminer le SEP associé à  $\alpha + \beta$  on résout  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Pas de souci particulier ici (penser à utiliser  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  pour les simplifications) : on trouve

$$E_{\alpha+\beta}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- (b) **En déduire que si  $\alpha + \beta < 1$ , alors le modèle est viable.**

Si  $\alpha + \beta < 1$ , alors avec  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  :

$$X - AX = (1 - (\alpha + \beta)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et ce dernier vecteur est bien à composantes  $> 0$  car  $1 - (\alpha + \beta) > 0$ .

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$  est donc une solution aux contraintes de la question 5a ; et le modèle est viable.

**On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de  $A$  est inclus dans  $] -1, 1[$ .**

7. (a) **Montrer que le modèle est viable si et seulement si  $\alpha + \beta < 1$ .**

Si le modèle est viable, le spectre de  $A$  est inclus dans  $] -1, 1[$ , et donc  $\alpha + \beta$ , qui appartient à ce spectre, est  $< 1$ .

Réciproquement, si  $\alpha + \beta < 1$ , le modèle est viable d'après la question précédente.

- (b) **Déterminer les valeurs propres de  $A$  autres que  $\alpha + \beta$ , et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .**

**à faire**

8. On suppose, dans cette question seulement, que  $\alpha$  est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur  $]0, 1[$  et que  $\beta$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $]0, 1[$ , admettant une densité de probabilité  $f$  qui est CSP( $]0, 1[$ ).

En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut  $1 - E(\beta)$ .

D'après ce qui précède, la probabilité que le modèle soit viable est  $P(\alpha + \beta < 1) = P(\alpha < 1 - \beta)$ .

On applique la partie I, avec :

- $U = \alpha$  (suit bien  $\mathcal{U}([0, 1])$ )
- $I = ]0, 1[$ , et  $X = \beta$  (**NB** : il faut supposer  $\alpha$  et  $\beta$  indépendantes, ce que ne dit pas l'énoncé...)
- $h : t \mapsto 1 - t$  va bien de  $]0, 1[$  dans  $[0, 1]$

Alors :

$$P(\alpha < 1 - \beta) = \int_0^1 f(t)(1 - t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt$$

$\beta$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ , de densité  $f$ , donc  $\int_0^1 f(t) dt = 1$  et  $\int_0^1 t f(t) dt = E(\beta)$  ; ce qui donne

$$P(\text{modèle viable}) = P(\alpha < 1 - \beta) = 1 - E(\beta)$$

9. On suppose désormais que  $\alpha$  et  $\beta$  sont tels que le modèle est viable. Pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ , on note  $y_i$  le coût de production d'une unité de bien dans le secteur  $i$ , et  $y_i + z_i$ , le prix de vente d'une unité de bien du secteur  $i$ . La marge  $z_i$  est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant  $y_i$ .

On définit les deux matrices lignes :  $Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)$  et  $Z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)$  ainsi que la matrice carrée

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Établir la relation matricielle

$$Y = Y A + Z B \quad (1)$$

Effectuons le bilan financier de  $S_1$  lors de la production d'une unité :

- le secteur s'achète  $\alpha y_1$  à lui-même (prix coûtant) ;
- le secteur achète  $\alpha$  unités du secteur 2, au prix  $\alpha(y_2 + z_2)$ .

Tout cela pour produire une unité de valeur  $y_1$ .

On a donc  $y_1 = \alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)$

De même en examinant les secteurs 2 et 3 on trouve les relations

$$y_2 = \beta(y_1 + z_1) + \alpha(y_3 + z_3)$$

$$y_3 = \beta(y_2 + z_2) + \beta y_3$$

De plus

$$Y A = (\alpha y_1 + \alpha y_2 \quad \beta y_1 + \alpha y_3 \quad \beta y_2 + \beta y_3)$$

et

$$Z B = (\alpha z_2 \quad \beta z_1 + \alpha z_3 \quad \beta z_2)$$

Les équations déterminées ci-dessus montrent bien, composante par composante que  $Y = Y A + Z B$ .

- (b) Justifier sans calculs l'inversibilité de  $I_3 - A$ .

En déduire que pour  $Z$  fixé, il existe un unique  $Y$  vérifiant la relation (1).

Le modèle est viable donc on a vu que  $\text{Sp}(A) \subset ]-1, 1[$  ; notamment  $1 \notin \text{Sp}(A)$  ; et donc  $A - I_3$  est inversible, et  $I_3 - A$  également.

À  $Z$  fixé, on cherche donc  $Y$  tel que

$$Y = Y A + Z B \Leftrightarrow Y - Y A = Z B \Leftrightarrow Y(I_3 - A) = Z B$$

et donc  $Y = Z B(I_3 - A)^{-1}$  est la seule solution de (1).

## Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Scilab par exemple, on dispose de l'instruction `rand()`. Ces générateurs produisent une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ces générateurs aléatoires.

Les programmes demandés dans ce qui suit devront donc utiliser uniquement la fonction `rand()`.

Jusqu'à la fin du problème : on note  $Z$  une variable aléatoire continue à valeurs dans  $I$ , de fonction de répartition  $G$  et admettant une densité  $g$  qui est CSP( $I$ ).

### 3a - Simulation par la méthode d'inversion

10. (a) On note  $H$  la restriction de  $G$  à  $I$ . Montrer que  $H$  réalise une bijection de  $I$  sur  $]0, 1[$ .  
On note  $H^{-1}$  la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de  $H^{-1}$ .

$g$  est nulle en dehors de  $I = ]a, b[$ , donc

$$\forall x < a, G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > b, G(x) = 1$$

$G$  étant continue on a aussi  $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = 1$ .

$G$  est continue, strictement croissante sur  $]a, b[$  (car  $g$  y est strictement positive) ; donc elle réalise une bijection de  $]a, b[$  sur  $]0, 1[$  ; ce qui se formule aussi en disant que la restriction de  $G$  à  $]a, b[$  est une bijection de  $]a, b[$  sur  $]0, 1[$ .

$H^{-1}$  est alors définie sur  $]0, 1[$ , à valeurs dans  $]a, b[$ , et de même sens de variation que  $H$  ; donc strictement croissante. On obtient le tableau :

$x$	$a$	$b$
$H^{-1}(x)$	0	1

Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

On pose  $X = H^{-1}(U)$ , et on note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

- (b) Montrer que pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $F(x) = G(x)$ .

$\forall x \in I$ ,  $F(x) = P(X \leq x) = P(H^{-1}(U) \leq x)$ , avec  $U \in ]0, 1[$  et  $x \in I$  ; ce qui permet d'écrire (par croissance de la bijection  $H$ ) :  $\forall x \in I$ ,  $F(x) = P(H^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq H(x))$ .

Enfin,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $H(x) \in ]0, 1[$  donc  $P(U \leq H(x)) = H(x)$  (loi uniforme). On a donc montré :

$$\forall x \in I, F(x) = H(x) = G(x)$$

car  $H$  et  $G$  coïncident sur  $I$ .

- (c) En déduire que  $X$  suit la même loi que  $Z$ .

Il faut montrer que  $F(x) = G(x)$  pour  $x \notin I$ .

Si  $x \leq a$ ,  $G(x) = 0$  (car  $Z$  est à valeurs dans  $I$ ) ; et  $F(x) = P(H^{-1}(U) \leq x) \leq P(H^{-1}(U) \leq a) = 0$  car  $H^{-1}$  est à valeurs dans  $]a, b[$ . Donc  $F(x) = G(x) = 0$ .

De même, si  $x \geq b$ ,  $G(x) = 1$  ; et  $F(x) = P(H^{-1}(U) \leq x) = 1$  car  $H^{-1}$  est à valeurs dans  $]a, b[$ . Donc  $F(x) = G(x) = 1$ .

(NB : si  $a = -\infty$  et/ou  $b = +\infty$ , les cas ci-dessus n'ont pas lieu... mais on n'en a pas besoin !) Finalement, on a montré que  $F(x) = G(x)$  pour tout réel  $x$  :  $X$  et  $Z$  ont même fonction de répartition, donc même loi.

11. Simulation de lois exponentielles.

On suppose dans cette question que  $Z$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

- (a) **Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et  $H^{-1}$ .**

La densité usuelle de la loi exponentielle est nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et  $> 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  : on a donc  $I = \mathbb{R}_+$  ;  $g(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  pour  $x > 0$  ;  $G(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  pour  $x > 0$ .

H est donc la fonction définie de  $\mathbb{R}_+$  dans  $]0, 1[$  par  $H(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ; on voit alors que  $y = H(x) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$  ; de sorte que  $H^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$ .

- (b) **Écrire une fonction Python `expo(lambd)` qui prend en argument un réel `lambd>0` et renvoie un tirage d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `lambd`. Cette fonction n'utilisera que la commande `rd.random()`.**

Il suffit de considérer une variable U suivant  $\mathcal{U}([0, 1])$ , et de renvoyer  $H^{-1}(U)$  :

```
def expo(lambd):
    u=rd.random()
    return -1/lambd*np.log(1-u)
```

NB : vous reconnaissez évidemment dans ce cas particulier une question très très usuelle !!

## 12. Simulation de la loi de Laplace.

On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité  $g$  donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (\text{densité de Laplace}).$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ , ce qui signifie :

$$P([V = -1]) = P([V = 1]) = \frac{1}{2}$$

On pose  $X = VY$ .

- (a) **Vérifier que  $g$  est une densité de probabilité qui est CSP( $\mathbb{R}$ ).**

$g$  est une densité car elle est continue (composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ) et positive ( $> 0$  car c'est une exponentielle). Montrons que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  converge et vaut 1.

On remarque que  $g$  est paire : il suffit donc de s'intéresser à  $\int_0^{+\infty} g(x) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  qui converge (intégrale usuelle) et vaut  $\frac{1}{2}$ . Par parité,  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  converge et vaut 1 :  $g$  est bien une densité.

Pour le caractère CSP( $\mathbb{R}$ ), il faut montrer que  $g$  est continue et  $> 0$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui a été fait.

- (b) **Établir :**

- pour tout  $x \geq 0$ ,  $P([X > x]) = \frac{1}{2} P([Y > x])$
- pour tout  $x \leq 0$ ,  $P([X \leq x]) = \frac{1}{2} P([Y \geq -x])$

On utilise une formule des probabilités totales, avec le SCE  $([V = 1], [V = -1])$ . On a, pour  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(X > x, V = 1) + P(X > x, V = -1) \\ &= P(VY > x, V = 1) + P(VY > x, V = -1) \\ &= P(Y > x, V = 1) + P(-Y > x, V = -1) \\ &= P(Y > x)P(V = 1) + P(Y < -x)P(V = -1) \quad \text{par indépendance de V et Y} \\ &= \frac{1}{2} P(Y > x) + \frac{1}{2} P(Y < -x) \end{aligned}$$

Or  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$  donc est à valeurs positives ; pour  $x \geq 0$  on a  $P(Y < -x) = 0$  ; et donc  $P(X > x) = \frac{1}{2} P(Y > x)$ .



De manière similaire, pour tout  $x \leq 0$ ,

$$P(X \leq x) = P(X \leq x, V = 1) + P(X \leq x, V = -1) = \frac{1}{2}P(Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Y \geq -x) = \frac{1}{2}P(Y \geq -x)$$

car comme  $Y$  est à valeurs positives et  $x \leq 0$ , on a  $P(Y \leq x) = 0$ .

(c) **En déduire une expression de la fonction de répartition de  $X$ .**

Pour tout  $x \leq 0$ , on obtient directement

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = \frac{1}{2}P([Y \geq -x]) = \frac{1}{2}(1 - F_Y(-x))$$

Pour  $x > 0$ ,

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = 1 - P([X > x]) = 1 - \frac{1}{2}P([Y > x]) = 1 - \frac{1}{2}(1 - F_Y(x)) = \frac{1}{2}(1 + F_Y(x))$$

et avec l'expression de  $F_Y$  comme fonction de répartition de la loi  $\mathcal{E}(1)$  :

$$\forall x \leq 0, F_X(x) = \frac{1}{2}(1 - (1 - e^{-(-x)})) = \frac{1}{2}e^x$$

$$\forall x > 0, F_X(x) = \frac{1}{2}(1 + 1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

(d) **Conclure que  $X$  est une variable aléatoire à densité, admettant  $g$  comme densité.**

La fonction de répartition est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et continue en 0 (vérification aisée) ;  $X$  est donc à densité, et on obtient une densité en dérivant :

$$\forall x > 0, f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad ; \quad \forall x < 0, f_X(x) = \frac{1}{2}e^x$$

et en posant  $f_X(0) = \frac{1}{2}$  on a bien  $f_X = g$ .

(e) **Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace (en utilisant la fonction programmée à la question 11b) :**

Il suffit donc de tirer  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ , de tirer  $V$  valant  $\pm 1$  de manière équiprobable, et de renvoyer  $VY$  ; ou encore de tirer  $Y$ , et de renvoyer  $Y$  ou  $-Y$  de manière équiprobable.

```
def laplace():
    Y = expo(1)
    r = rd.random()
    if r < 1/2 :
        X = Y
    else :
        X = -Y
    return X
```

### 3b - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de  $Z$  de densité  $g$  (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité  $f$  qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\forall x \in I, g(x) \leq cf(x)$ .

13. **Montrer qu'il existe une fonction  $h$  continue sur  $I$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,**

$g(x) = cf(x)h(x)$ . Il semble raisonnable de poser  $h(x) = \frac{g(x)}{cf(x)}$ . Montrons que cette fonction convient :

- $f$  est CSP(I) donc  $> 0$  sur  $I$ , et  $c > 0$ . La fonction  $h$  ainsi définie est donc continue sur  $I$  comme composée de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- en divisant car  $cf(x) > 0$  l'inégalité supposée dans cette question, on obtient :

$$\forall x \in I, \underbrace{\frac{g(x)}{cf(x)}}_{=h(x)} \leq 1$$

De plus,  $f$  et  $g$  sont des densités donc sont positives ;  $c > 0$  ; par suite  $h$  est bien à valeurs positives.

- enfin, par construction, on a bien  $g(x) = cf(x)h(x)$ .

On considère alors :

- une suite de variable aléatoires  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  qui suivent une loi uniforme sur  $]0, 1[$ .
- une suite de variable aléatoires  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  à valeur dans  $]a, b[$  ayant toutes la même loi de densité de probabilité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ .  
On suppose de plus que pour tout entier  $n \geq 1$ , les variables  $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$  sont mutuellement indépendantes.

On définit  $N$  la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice  $k$  vérifiant  $U_k \leq h(X_k)$ .

14. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $P([U_k \leq h(X_k)]) = \frac{1}{c}$ .

En déduire que  $N$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

Pour tout  $k$ ,  $U_k$  et  $X_k$  sont indépendantes.  $f$  est CSP(I),  $h$  est continue de  $I$  dans  $[0, 1]$ , donc la partie 1 s'applique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(U_k \leq h(X_k)) = \int_a^b f(t)h(t) dt = \int_a^b \frac{g(t)}{c} dt = \frac{1}{c} \int_a^b g(t) dt$$

Or,  $g$  est une densité CSP( $]a, b[$ ), donc  $\int_a^b g(t) dt = 1$  ; et on a bien  $P([U_k \leq h(X_k)]) = \frac{1}{c}$ .

$N$  mesure alors le premier rang  $k$  pour lequel  $U_k \leq h(X_k)$  ; événement qui arrive avec une proba  $\frac{1}{c}$  ; et les tirages successifs de  $(U_k, X_k)$  sont indépendants. On est donc dans un schéma de loi géométrique :  $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{c}\right)$ .

Le cours donne alors  $E(N) = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c$  et  $V(N) = \frac{1 - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c^2}} = c(c-1)$ .

On définit la variable aléatoire  $X$  comme étant la valeur de  $X_N$ , c'est à dire la valeur de  $X_k$  pour le premier indice  $k$  vérifiant  $U_k \leq h(X_k)$ .

15. Soit  $x \in I$ .

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Exprimer l'événement  $[X \leq x] \cap [N = n]$  à partir des événements  $[X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]$  et  $[U_k > h(X_k)]$  pour  $k \in [1, n-1]$ .

$N$  est le premier indice  $i$  tel que  $U_i \leq h(X_i)$  ; on a donc

$$[N = n] = \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} [U_i > h(X_i)] \right) \cap [U_n \leq h(X_n)]$$

La variable  $X$  vaut alors  $X_n$  ; d'où

$$[X \leq x] \cap [N = n] = \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} [U_i > h(X_i)] \right) \cap [U_n \leq h(X_n)] \cap [X_n \leq x]$$

- (b) En utilisant la question 3b), montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \frac{1}{c} G(x)$$

$U_n$  et  $X_n$  sont indépendantes, et les hypothèses nous permettent encore d'appliquer la partie 1 :

$$\begin{aligned} P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) &= \int_a^x f(t)h(t) dt \\ &= \frac{1}{c} \int_a^x g(t) dt \\ &= \frac{1}{c} (G(x) - G(a)) \end{aligned}$$

Or  $Z$  est à densité nulle hors de  $[a, b]$ , donc  $G(a) = P(Z \leq a) = 0$  ; et donc :

$$P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \frac{1}{c} G(x)$$

- (c) **En déduire**  $P([X_n \leq x] \cap [N = n])$  **en fonction de**  $c$  **et de**  $G(x)$ .

Par indépendance mutuelle des  $U_k, X_k$  :

$$\begin{aligned} P([X \leq x] \cap [N = n]) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [U_i > h(X_i)]\right) \cap [U_n \leq h(X_n)] \cap [X_n \leq x]\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} P([U_i > h(X_i)])\right) \times P([U_n \leq h(X_n)] \cap [X_n \leq x]) \\ &= \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \frac{1}{c} G(x) \quad \text{d'après 14 et 15b} \end{aligned}$$

- (d) **Montrer finalement** :  $P([X \leq x]) = G(x)$ .

On applique enfin la formule des probabilités totales avec le SCE  $(N = n)_{n \geq 1}$  :

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([X \leq x] \cap [N = n]) \\ &= \frac{1}{c} G(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{c} G(x) \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{c})} = G(x) \end{aligned}$$

#### 16. Conclure.

Montrons alors que  $Z$  et  $X$  ont même fonction de répartition.

$X$  étant défini comme l'un des  $X_i$ , on a  $X(\Omega)$  égal à  $]a, b[$  (image commune de tous les  $X_i$ ).

$X(\Omega) = Z(\Omega) = ]a, b[$ , donc les fonctions de répartition de  $Z$  et  $X$  sont nulles sur  $] -\infty, a]$  et sur  $[b, +\infty[$ .

Sur  $]a, b[$ , on a vu que  $P(X \leq x) = G(x)$  avec  $G$  fonction de répartition de  $Z$  : ici aussi les fonctions de répartition de  $Z$  et  $X$  coïncident.

$Z$  et  $X$  ont donc la même fonction de répartition ; donc la même loi. Un tirage de  $X$  permet ainsi de simuler  $Z$ . Ce tirage se fait en tirant des  $X_i$  (ce qu'on sait faire par hypothèse) ; des  $U_i$  (loi uniforme : on sait faire), jusqu'à ce qu'on ait  $U_i \leq h(X_i)$ . Ce  $X_i$  donne alors une simulation de  $Z$ .

#### 17. Simulation de la loi normale.

**Dans cette question,  $Z$  suit la loi normale centrée réduite, donc  $I = \mathbb{R}$ .**

**Soit  $f$  la densité de Laplace (question 12), définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .**

- (a) **Donner une densité  $g$  de  $Z$  qui est CSP( $\mathbb{R}$ ).**

D'après le cours, une densité de  $Z$  est donnée par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Cette fonction est bien CSP( $\mathbb{R}$ ) (facile à vérifier).

- (b) **Étudier les variations sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $a : x \mapsto e^{x-x^2/2}$ .**

Cette fonction est dérivable, et  $a'(x) = (1-x)e^{x-x^2/2}$ .  $a$  est donc croissante sur  $]0, 1]$  et décroissante sur  $[1, +\infty[$  ; elle atteint son max en 1, et ce max vaut  $e^{1/2}$ .

- (c) **Expliciter une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $x \geq 0$  :  $g(x) \leq \frac{c}{2} e^{-x}$ .**

On vient donc de montrer, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} a(x) &\leq e^{1/2} \\ e^{x-x^2/2} &\leq e^{1/2} \\ e^{-x^2/2} &\leq e^{1/2-x} \\ g(x) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/2} e^{-x} \end{aligned}$$

et  $c = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{1/2}$  convient.

(NB : numériquement on a bien  $c > 1$ , ce qui rend pertinents tous les calculs précédents...)

- (d) **En déduire que pour tout  $x$  réel,  $g(x) \leq cf(x)$ .**

On a le résultat pour  $x \geq 0$ . Si  $x < 0$ ,  $-x > 0$  donc  $g(-x) \leq cf(-x)$  ; or  $f$  et  $g$  sont paires donc ceci s'écrit aussi  $g(x) \leq cf(x)$ , et le résultat est encore vrai.

Finalement, pour tout  $x$  réel,  $g(x) \leq cf(x)$ .

- (e) **Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction  $h$  introduite à la question 13.**

La fonction  $h$  est donc donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{g(x)}{cf(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-1/2} 2e^{-|x|} = \exp\left(-\left(|x| + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

On suit ensuite la procédure exposée à la question 16.

- (f) **Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :**

```
def normale():
    x = laplace()
    u = rd.random()
    while u > np.exp(-np.abs(x)-x**2/2-1/2):
        x = laplace()
        u = rd.random()
    return x
endfunction
```