

## Devoir maison n°1-1bis Corrigé

### Exercice 1 (DM1)

Soient les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B, C, D)$ .

1. **Montrer que la famille  $(A, B, C, D)$  est liée. Qu'en déduire sur  $\dim(\mathcal{F})$  ?**

Il est difficile de repérer une relation de liaison sans calculs supplémentaires. Cherchons donc à quelle condition les réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  sont solutions de

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = \mathbf{0}$$

(on a noté  $\mathbf{0}$  la matrice nulle).

En examinant les coefficients de la matrice  $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D$ , on obtient que cette matrice est nulle ssi :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

On peut par exemple injecter  $\lambda_4 = -\lambda_1$  dans les lignes 2,3,4 du système pour obtenir :

$$\begin{cases} \lambda_4 = -\lambda_1 \\ -4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ -6\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ \lambda_2 = 3\lambda_1 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non nulles (par exemple  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -1$ ) ; la famille  $A, B, C, D$  est donc liée.

On savait déjà que  $\dim \mathcal{F} = \text{rg}(A, B, C, D) \leq 4$  ; le fait qu'on ait une famille liée fait qu'on a en fait  $\dim \mathcal{F} \leq 3$ .

2. **Montrer que  $(A, B, C)$  est une base de  $\mathcal{F}$ . Donner le rang de la famille  $(A, B, C, D)$ .**

On doit donc trouver une base de  $\mathcal{F}$ . La solution non nulle du système fournit la relation de liaison  $A + 3B - 2C - D = 0$  ; on peut donc par exemple écrire  $D = A + 3B - 2C$ , ce qui implique que  $\text{Vect}(A, B, C, D) = \text{Vect}(A, B, C)$  et  $(A, B, C)$  est génératrice de  $\mathcal{F}$ . Il reste donc à montrer que la famille  $(A, B, C)$  est libre.

On cherche alors les solutions de l'équation  $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \mathbf{0}$  ; cette équation équivaut au système traité précédemment, avec  $\lambda_4 = 0$ . En reprenant les calculs, on trouve

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 \\ \lambda_2 = 3\lambda_1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille  $(A, B, C)$  est libre : c'est donc une base de  $\mathcal{F}$ , et on a  $\dim(\mathcal{F}) = 3$ .

3. La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  appartient-elle à  $\mathcal{F}$  ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base (A, B, C).

On recherche cette fois l'existence (et leur valeur, s'ils existent) de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  réels tels que  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ . Ceci équivaut au système

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

dont la résolution donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (*) \\ \lambda_3 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

(notons que les trois valeurs sont connues sans avoir besoin de l'équation (\*) ; il faut par contre que cette équation soit vérifiée, faut de quoi le système n'admettrait pas de solution).

Donc  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$ , et on a  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = B - 2C$  (prendre le temps de vérifier ce calcul...).

4. Montrer que  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + z = y - 2t \right\}$ .

Notons  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + z = y - 2t \right\}$ .

De manière classique, on a (par exemple) :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + z = y - 2t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2t - z & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, t \text{ réels} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Un système immédiat à résoudre montre que la famille  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est libre, donc c'est une base de  $G$ , et  $\dim(G) = 3 = \dim(\mathcal{F})$ .

On montre ensuite que  $\mathcal{F} \subset G$  : en effet, A, B, C sont des éléments de  $G$  (leurs coefficients vérifient bien  $x + z = y - 2t$ ) ;  $G$  étant un sev, on a donc  $\text{Vect}(A, B, C) \subset G$ .

Par inclusion et égalité des dimensions, on a  $\mathcal{F} = G$ .

## Exercice 2 (DM1) / Exercice 1 (DM1bis)

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, K)$ .

1. Donner une base et la dimension de  $\mathcal{F}$ .

Par définition, (I, J, K) est génératrice de  $\mathcal{F}$ . Regardons si elle est libre : soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  des réels tels que

$$\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc clairement  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  : la famille est bien libre.

On peut donc conclure que  $(I, J, K)$  est une base de  $\mathcal{F}$ , et donc  $\dim(\mathcal{F}) = 3$ .

2. Calculer les produits  $J^2, K^2, JK, KJ$ . En déduire que  $\mathcal{F}$  est stable par produit, c'est-à-dire :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{F}^2, MM' \in \mathcal{F}$$

Des calculs sans difficulté donnent :  $J^2 = K, JK = KJ = K^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .

Soient alors deux matrices  $M$  et  $M'$  de  $\mathcal{F}$ . On peut écrire :

$$M = aI + bJ + cK \quad \text{et} \quad M' = a'I + b'J + c'K$$

et donc

$$\begin{aligned} MM' &= (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K) \\ &= aa'I + ab'J + ac'K + ba'J + bb' \underbrace{J^2}_{=K} + bc' \underbrace{JK}_{=0} + ca'K + cb' \underbrace{KJ}_{=0} + cc' \underbrace{K^2}_{=0} \\ &= aa'I + (ab' + ba')J + (ac' + bb' + ca')K \end{aligned}$$

et on obtient bien une matrice de  $\text{Vect}(I, J, K) = \mathcal{F}$ .

$\mathcal{F}$  est bien stable par produit.

3. On s'intéresse à l'inversibilité des matrices de  $\mathcal{F}$ . Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on note  $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$ .

(a) Montrer que  $M$  est inversible ssi  $a \neq 0$ .

$$\text{On écrit explicitement : } M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire, donc est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls ; donc ssi  $a \neq 0$ .

(b) Pour  $(b, c, x, y) \in \mathbb{R}^4$ , calculer le produit  $(I + bJ + cK)(I + xJ + yK)$ . En déduire  $M(1, b, c)^{-1}$ .

On reprend le calcul précédent avec ces nouvelles notations ; il vient :

$$(I + bJ + cK)(I + xJ + yK) = I + (b + x)J + (y + bx + c)K$$

$M(1, b, c)^{-1}$  est l'unique matrice  $N$  telle que  $M(1, b, c)^{-1}N = I$  (on sait qu'elle existe d'après la question précédente car  $1 \neq 0$ ).

On peut alors chercher  $x$  et  $y$  tels que

$$\begin{cases} b + x = 0 \\ y + bx + c = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $x = -b$  et  $y = -c - bx = b^2 - c$ .

Ainsi :

$$(I + bJ + cK)(I - bJ + (b^2 - c)K) = I$$

ce qui montre que  $I - bJ + (b^2 - c)K = (I + bJ + cK)^{-1}$  ; ou encore :

$$M(1, b, c)^{-1} = M(1, -b, b^2 - c)$$

4. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice  $M(1, 1, 1) = I + J + K$ .

(a) Exprimer  $(I + J + K)^2$  et  $(I + J + K)^3$  comme des combinaisons linéaires de  $I, J, K$ .

Avec  $x = y = a = b$  dans le calcul précédent, on trouve

$$(I + J + K)^2 = (I + J + K)(I + J + K) = I + 2J + 3K$$

et

$$(I + J + K)^3 = (I + J + K)^2(I + J + K) = (I + 2J + 3K)(I + J + K) = I + 3J + 6K$$

(b) Justifier que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe trois réels  $a_n, b_n, c_n$  tels que

$$(I + J + K)^n = a_n I + b_n J + c_n K$$

(on rappelle que pour toute matrice  $M$ ,  $M^0 = I$ ).

Justifier que ces réels sont uniques.

Exprimer  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n, c_n$ .

Comme  $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, K)$  est stable par produit, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (I + J + K)^n \in \mathcal{F}$ . De plus,  $(I + J + K)^0 = I \in \mathcal{F}$ .

On a vu que  $(I, J, K)$  est une base de  $\mathcal{F}$  :  $(a_n, b_n, c_n)$  sont donc les coordonnées de  $(I + J + K)^n$  dans cette base, et sont donc uniques.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé ; on a  $(I + J + K)^n = a_n I + b_n J + c_n K$ .

Alors :

$$(I + J + K)^{n+1} = (I + J + K)^n (I + J + K) = (a_n I + b_n J + c_n K)(I + J + K) = a_n I + (a_n + b_n)J + (a_n + b_n + c_n)K$$

et on lit directement, par unicité, que

$$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = a_n + b_n, c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$$

(c) Déterminer la valeur de  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; puis de  $b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On commence par remarquer que :  $(I + J + K)^0 = I = 1 \times I + 0 \times J + 0 \times K$  ; ce qui donne par unicité  $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$ .

On a pour tout entier  $n$ ,  $a_{n+1} = a_n$  ; donc la suite  $(a_n)$  est constante. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 = 1$$

La seconde relation de récurrence devient alors  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = b_n + 1$  ; ce qui montre que  $(b_n)$  est arithmétique, de raison 1. Comme  $b_0 = 0$ , la formule des suites arithmétiques donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = n$$

(d) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

En injectant ce qu'on vient de démontrer, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n + n + 1$$

On peut alors montrer par récurrence la propriété proposée : soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $c_n = \frac{n(n+1)}{2}$  »

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $c_0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé ; on suppose que  $c_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Alors

$$c_{n+1} = c_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

et on a bien  $\mathcal{P}(n+1)$ .

• **Conclusion** : on a bien, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. On rappelle que pour  $M$  inversible, on définit  $M^{-n} = (M^{-1})^n$ . Montrer, à l'aide de ce qui précède, que pour tout entier  $n > 0$ , on a

$$(I + J + K)^{-n} = I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

On vient de voir :  $\forall n > 0, (I + J + K)^n = I + nJ + \frac{n(n+1)}{2}K = M \left( 1, n, \frac{n(n+1)}{2} \right)$ .

La question 3b montre alors que

$$\begin{aligned}
 (I+J+K)^{-n} &= ((I+J+K)^n)^{-1} \\
 &= \left( M \left( 1, n, \frac{n(n+1)}{2} \right) \right)^{-1} \\
 &= M \left( 1, -n, n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \quad \text{question 3b} \\
 &= M \left( 1, -n, \frac{n(n-1)}{2} \right) \\
 (I+J+K)^{-n} &= I - nJ + \frac{n(n-1)}{2}K
 \end{aligned}$$

## Exercice 2 (DM1bis)

On s'intéresse dans ce problème à la notion de sous-espaces supplémentaires.

**Définition 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ssi on a :

- $\forall x \in E, \exists (u, v) \in F \times G, x = u + v$  ;
- $F \cap G = \{0_E\}$ .

On note alors :  $E = F \oplus G$ .

### Un premier exemple

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ , et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

1. **Montrer que  $F \cap G = \{0_E\}$ .**

Soit  $u \in F \cap G$ . Alors :

- $u \in \text{Vect}((1, 1, 1))$  ; donc il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $u = a(1, 1, 1) = (a, a, a)$
- $u \in G$  donc la somme de ses trois coordonnées est nulle ; d'où  $a + a + a = 0$  : donc  $a = 0$

Finalement  $u = (0, 0, 0) = 0_E$ . On en conclut que  $F \cap G \subset \{0_E\}$  ; et comme  $0_E \in F \cap G$  ( $F$  et  $G$  sont des sev) on a finalement  $F \cap G = \{0_E\}$ .

2. **Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On suppose qu'on peut écrire**

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + (x', y', z') \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } x' + y' + z' = 0$$

**Déterminer la valeur de  $a$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .**

Sous cette hypothèse, on a  $x = a + x', y = a + y', z = a + z'$ . En sommant ces trois équations :

$$x + y + z = 3a + \underbrace{(x' + y' + z')}_{=0} = 3a ; \text{ et donc}$$

$$a = \frac{x + y + z}{3}$$

3. **Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .**

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Il faut donc écrire  $(x, y, z)$  comme une somme de deux vecteurs : le premier étant dans  $F$  et le second dans  $G$ . Si une telle décomposition existe, c'est celle de la question précédente, et

$$a = \frac{x + y + z}{3}.$$

Vérifions alors que ceci donne bien une solution : on écrit

$$(x, y, z) = \left( \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3} \right) + (x', y', z')$$

ce qui donne

$$x' = x - \frac{x + y + z}{3} = \frac{2x - y - z}{3} \quad \text{et de même} \quad y' = \frac{-x + 2y - z}{3} \quad \text{et} \quad z' = \frac{-x - y + 2z}{3}$$

On obtient finalement la décomposition :

$$(x, y, z) = \left( \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3} \right) + \left( \frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3} \right)$$

et on vérifie que le premier vecteur de cette somme est dans F, et le second dans G.

On a ainsi montré que F et G étaient supplémentaires dans E.

## Un second exemple

On rappelle qu'une matrice M est dite *symétrique* ssi  ${}^tM = M$ , et *antisymétrique* ssi  ${}^tM = -M$ .

On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques, et  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétriques.

### 1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $S_n(\mathbb{R})$  :

- $S_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- si on note  $\mathbf{0}$  la matrice nulle,  ${}^t\mathbf{0} = \mathbf{0}$  donc  $\mathbf{0}$  est symétrique :  $S_n(\mathbb{R})$  est non vide ;
- Pour toutes  $M \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $N \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN = \lambda M + N$$

la première égalité venant par linéarité de la transposition, et la seconde car M et N sont supposées symétriques.

On en conclut que  $\lambda M + N \in S_n(\mathbb{R})$ .

Par ces trois points on peut conclure que  $S_n(\mathbb{R})$  est un sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Le raisonnement est similaire pour  $A_n(\mathbb{R})$ .

### 2. Donner une base de $S_3(\mathbb{R})$ (une base de $A_3(\mathbb{R})$ a été obtenue en TD...).

Méthode similaire au TD : une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  est symétrique ssi :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

On obtient 9 équations qui se ramènent assez rapidement au système :

$$\begin{cases} d = b \\ g = c \\ h = f \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} \mid (a, b, c, e, f, i) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

### 3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la matrice $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ est symétrique, et que la matrice $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$ est antisymétrique.

On a, par linéarité de la transposition :

$${}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M)$$

donc cette matrice est symétrique ; et

$${}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

donc la matrice  $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$  est antisymétrique.

**4. En déduire que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .**

En revenant à la définition, on cherche à montrer que  $A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ , et que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  s'écrit comme somme d'une matrice de  $S_n(\mathbb{R})$  et d'une matrice de  $A_n(\mathbb{R})$ .

- Pour le premier point : soit  $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ .  $M$  est symétrique donc  ${}^tM = M$  ;  $M$  est antisymétrique donc  ${}^tM = -M$ . On déduit de ces deux propriétés que  $M = -M$  ; donc  $M = 0$  (matrice nulle). Ainsi  $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$
- On remarque ensuite que :  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$  ; par les questions précédentes, ceci donne la décomposition recherchée.

On a bien montré :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

## Non-unicité du supplémentaire

**On montre ici sur un exemple que si  $F$  est un sev de  $E$ , il existe au moins deux sev  $G$  et  $H$  de  $E$ , avec  $G \neq H$ , tels que :**

- **$F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;**
- **$F$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $E$ .**

**Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 5,  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  supplémentaires dont on note des bases respectives  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(v_1, v_2)$ .**

**Soit  $H = \text{Vect}(v_1 + u_1, v_2)$ .**

**5. Montrer que  $v_1 + u_1 \notin G$  (on procédera par l'absurde). En déduire que  $G \neq H$ .**

Supposons donc, par l'absurde, que  $v_1 + u_1$  est dans  $G$ . En décomposant sur la base de  $G$  on a des scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$v_1 + u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

relation qu'on peut écrire  $u_1 = (\alpha - 1)v_1 + \beta v_2$  ; ce qui montre que  $u_1 \in G$  (car il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de  $G$ ).

$u_1$  est donc dans  $F \cap G$ . Or  $F \cap G = \{0_E\}$  car ces espaces supplémentaires, et on a donc  $u_1 = 0_E$ .

Ceci est absurde car un vecteur de base ne peut pas être nul.

On conclut donc que  $u_1 + v_1 \notin G$  ; comme ce vecteur appartient par ailleurs à  $H$ , on a bien  $G \neq H$ .

**6. Montrer que  $F$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $E$ .**

Il s'agit de vérifier les deux propriétés qui définissent des espaces supplémentaires.

- Montrons que  $F \cap H = \{0_E\}$ .  
On a évidemment  $0_E \in F \cap H$ . Par ailleurs, si  $x$  est dans  $F \cap H$ , on peut le décomposer sur les bases de  $F$  et  $H$  fournies :

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \lambda(u_1 + v_1) + \mu v_2$$

En exploitant la seconde égalité on obtient :

$$(\alpha - \lambda)u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$$

et ce vecteur est dans  $F \cap G$  ; donc est nul.

On en déduit :

$$(\alpha - \lambda)u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_E \quad \text{et} \quad \lambda v_1 + \mu v_2 = 0_E$$

Par liberté des  $(v_i)$ ,  $\lambda, \mu$  sont donc nuls ; et donc  $x = 0_E$ .

On a bien montré que  $F \cap H = \{0_E\}$ .

- Montrons que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de H.  
 Pour cela on peut raisonnablement utiliser que F et G sont supplémentaires : il existe  $x_F \in F$ ,  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ .  
 En décomposant  $x_F$  et  $x_G$  sur les bases respectives de F et G, on a l'existence de scalaires  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$  tels que  $x_F = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$  et  $x_G = \lambda v_1 + \mu v_2$ . Alors

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \lambda v_1 + \mu v_2$$

Il reste à faire apparaître les vecteurs de base de H, notamment  $u_1 + v_1$ . On écrit :

$$\begin{aligned} x &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \lambda v_1 + \mu v_2 \\ &= \underbrace{(\alpha - \lambda) u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3}_{\in F} + \underbrace{\lambda(u_1 + v_1) + \mu v_2}_{\in H} \end{aligned}$$

et on obtient bien la forme voulue.